

**UNIVERZITET U NOVOM SADU  
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA**

Autori:

Dr Aleksandar Živković, docent

Dr Milan Zeljković, redovni profesor

Dr Slobodan Tabaković, vanredni profesor

**PROGRAMSKO REŠENJE ZA ANALIZU PONAŠANJA  
KUGLIČNIH LEŽAJA**

-Tehničko rešenje-

Novi Sad, 2013. godine

## Podaci o tehničkom rešenju

Vrsta tehničkog rešenja	M-85: Prototip, nova metoda, softver, standardizovan ili atestiran instrument, nova genetska proba, mikroorganizmi
Autori tehničkog rešenja	Autori:  Dr Aleksandar Živković, docent Dr Milan Zeljković, redovni profesor Dr Slobodan Tabaković, vanredni profesor
Naziv tehničkog rešenja	PROGRAMSKO REŠENJE ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA
Za koga je rađeno tehničko rešenje	Programsko rešenje za analizu ponašanja kugličnih ležaja je razvijeno za potrebe istraživanja koja se sprovode na Fakultetu tehničkih nauka u okviru projekta „Savremeni prilazi u razvoju specijalnih rešenja uležištenja u mašinstvu i medicinskoj protetici“ ev. broj TR 35025 i za potrebe analize pri projektovanju ležaja u preduzeću "FKL" iz Temerina
Ko koristi tehničko rešenje	Programsko rešenje se koristi za potrebe istraživanja i nastave na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu i za potrebe predikcije ponašanja ležaja u eksploataciji u fazi razvoja u preduzeću "FKL" iz Temerina
Godina izrade tehničkog rešenja	2013.
Verifikacija rezultata	Verifikacija je izvršena na specijalnim kugličnim ležajima za glavna vretena, točak vozila i kompresore kamiona i od starne recenzentata:  1. Prof. dr Miloš Glavonjić, redovni profesor, Mašinski fakultet, Beograd 2. Prof. dr Srboljub Simić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Ko je prihvatio tehničko rešenje	Nastavno naučno veće Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

**Sadržaj:**

<b>1.0 UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2.0 NAUČNO-STRUČNE PODLOGE TEHNIČKOG REŠENJA.....</b>	<b>2</b>
2.1 MATEMATIČKI MODELI ZA ISTRAŽIVANJE STATIČKOG PONAŠANJA .....	3
2.2 MATEMATIČKI MODELI ZA ISTRAŽIVANJE TOPLOTNOG PONAŠANJA .....	4
2.2 MATEMATIČKI MODELI ZA ISTRAŽIVANJE DINAMIČKOG PONAŠANJA .....	5
<b>3.0 TEORIJSKE PODLOGE ZA RAZVOJ PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA .....</b>	<b>7</b>
3.1 OPŠTI MATEMATIČKI MODEL ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA .....	7
3.2 TEORIJSKE OSNOVE PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ANALIZU STATIČKOG PONAŠANJA.....	8
3.2.1 Kontaktne sile, naponi i deformacije kugličnih ležaja.....	9
3.2.2 Definisanje ugla kontakta i aksijalnog pomeranja centra .....	11
ležaja usled sile prednaprezanja .....	11
3.2.3 Geometrija ležaja i odnos sila koje deluju na ležaj.....	13
3.3 TEORIJSKE OSNOVE PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ANALIZU TOPLOTNOG PONAŠANJA... ..	19
3.3.1 Određivanje količine razvijene toplove u ležaju .....	19
3.3.2 Mehanizmi prostiranja toplove kroz ležaj .....	20
3.3.2.1 Prenošenje toplove usled obrtanja elemenata ležaja .....	21
3.3.2.2 Provodenje toplove između elemenata ležaja.....	22
3.3.3 Određivanje toplovnog prednaprezanja.....	23
3.4 TEORIJSKE OSNOVE PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ANALIZU DINAMIČKOG PONAŠANJA ..	24
3.4.1 Kinetička energija unutrašnje staze kotrljanja .....	25
3.4.2 Kinetička energija kotrljajnih tela.....	26
3.4.3 Potencijalna energija usled kontaktnih deformacija .....	27
3.4.5 Jednačine kretanja.....	28
3.5 TEORIJSKE OSNOVE PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ODREĐIVANJE VEKA KUGLIČNIH LEŽAJA .....	28
<b>4.0 OPIS PROGRAMSKIH REŠENJA ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA .....</b>	<b>30</b>
4.1 PROGRAMSKO REŠENJE ZA ANALIZU STATIČKOG PONAŠANJA .....	30
4.2 PROGRAMSKO REŠENJE ZA ANALIZU TOPLOTNOG PONAŠANJA .....	32
4.3 PROGRAMSKO REŠENJE ZA ANALIZU DINAMIČKOG PONAŠANJA .....	33
4.4 PROGRAMSKO REŠENJE ZA ODREĐIVANJE VEKA KUGLIČNIH LEŽAJA .....	34
<b>5.0 ZAKLJUČAK.....</b>	<b>35</b>
<b>6.0 LITERATURA .....</b>	<b>36</b>
<b>PRILOZI.....</b>	<b>40</b>

Prilog P1 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za uležištenje glavnih vretena 40  
Prilog P2 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za uležištenje točka vozila .... 44  
Prilog P3 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za kompresore kamiona ..... 47

---

## Pregled korišćenih oznaka

D	spoljašnji prečnik spoljnog prstena [mm]
d	prečnik otvora [mm]
Z	broj kotrljajnih tela
$d_k$	prečnik kotrljajnih tela [mm]
$d_m$	srednji prečnik ležaja [mm]
$r_u$	radijus staze kotrljanja unutrašnjeg prstena [mm]
$r_s$	radijus estaze kotrljanja spoljašnjeg prstena [mm]
$d_u$	prečnik unutrašnje staze kotrljanja [mm]
$d_s$	prečnik spoljašnje staze kotrljanja [mm]
$R_{Cu}$	poluprečnik centra unutrašnje staze kotrljanja [mm]
$R_{Cs}$	poluprečnik centra spoljašnje staze kotrljanja [mm]
$R_x$	radijus zakrivljenosti u pravcu glavne ose [mm]
$R_y$	radijus zakrivljenosti u pravcu pomoćne ose [mm]
$F, E'$	eliptični integrali prve i druge vrste
$E_p, E_k$	modul elastičnosti prstena i kotrljajnog tela [N/mm <sup>2</sup> ]
a, b	glavna i pomoćna osa eliptičnog kontakta
$m_k$	masa kotrljajnog tela [kg]
$F_{(\rho)}$	razlika radiusa zakrivljenosti staza kotrljanja [mm]
$p_u$	talasastost u radijalnom pravcu unutrašnje staze [ $\mu\text{m}$ ]
$p_s$	talasastost u radijalnom pravcu spoljašnje staze [ $\mu\text{m}$ ]
$p_p$	maks. amplituda talasa na stazama kotrljanja [ $\mu\text{m}$ ]
$p_0$	početna amplituda talasa na stazama kotrljanja [ $\mu\text{m}$ ]
$q_u$	talasastost u aksijalnom pravcu unutrašnje staze [ $\mu\text{m}$ ]
$q_s$	talasastost u radijalnom pravcu spoljašnje staze [ $\mu\text{m}$ ]
L	dužina luka talasa [ $\mu\text{m}$ ]
$N_t$	broj talasa
$J_r(\varepsilon)$	Sjovall-ov integral opterećenja
$G_a$	aksijalni zazor [mm]
$G_r$	radijalni zazor [mm]
g	bočno ubrzanje integrisanog ležaja točka
$Q_u$	kontaktna opterećenja sa unutrašnjom stazom kotrljanja [N]
$Q_s$	kontaktna opterećenja sa spoljašnjom stazom kotrljanja [N]
Fr	spoljašnje radijalno opterećenje [N]
Fa	spoljašnje aksijalno opterećenje [N]
Wr	sila reakcije u radijalnom pravcu [N]
Wt	sila reakcije u aksijalnom pravcu [N]
e	ekscentričnost spoljašnjeg opterenjenja [mm]
Fp	sila prednaprezanja [N]
Fc	centrifugalna sila [N]
Mg	giroskopski moment [Nmm]

---

$M_u$	moment trenja sa unutrašnjom stazom kotrljanja [Nmm]
$M_s$	moment trenja sa spoljašnjom stazom kotrljanja [Nmm]
$H_u$	količina razvijene toplove na unutrašnjoj stazi kotrljanja [W]
$H_s$	količina razvijene toplove na spoljašnjoj stazi kotrljanja [W]
$u_{cent.}$	centrifugalno širenje prstenova [ $\mu\text{m}$ ]
$Kn$	Hertz-ova kontaktna krutost [ $\text{N/mm}^{1.5}$ ]
$K$	krutost ležaja [ $\text{N}/\mu\text{m}$ ]
$N_u$	Nusselt-ov broj
$P_r$	Prantlov broj
$R_e$	Rejnoldsov broj
$A_{u,s}$	površina kontakta sa stazama kotrljanja [ $\text{mm}^2$ ]
$I_p$	diametralni moment inercije
$J_p$	polarni moment inercije
$L_v$	vek ležaja [h], [km]
$Q_c$	ekvivalentno opterećenje [N]
$i$	broj redova kotrljajnih tela
$C_\mu$	dinamička nosivost unutrašnjeg prstena [N]
$C_v$	dinamička nosivost spoljašnjeg prstena [N]
$f_s$	frekvencija spoljašnjeg prstena [Hz]
$f_u$	frekvencija unutrašnjeg prstena [Hz]
$f_c$	frekvencija kaveza [Hz]
$f_{k,t}$	frekvencija kotrljajnih tela [Hz]
$f$	frekvencija vratila [Hz]
$\alpha_o$	nominalni ugao kontakta [ $^\circ$ ]
$\alpha_p$	ugao kontakta nakon prednaprezanja [ $^\circ$ ]
$\alpha_u$	ugao kontakta sa unutrašnjom stazom kotrljanja [ $^\circ$ ]
$\alpha_s$	ugao kontakta sa spoljašnjom stazom kotrljanja [ $^\circ$ ]
$\alpha_T$	koeficijent toplotnog širenja [ $\text{W/mK}$ ]
$\rho_i$	radijusi zakrivljenosti staza kotrljanja [mm]
$v_p, v_k$	Paosonov koeficijent prstena i kotrljajnog tela
$\sigma$	naponi na stazama kotrljanja [Pa]
$\chi$	ugao punjenja [ $^\circ$ ]
$\lambda$	širina talasa [ $\mu\text{m}$ ]
$\psi$	ugao između kotrljajnih tela [ $^\circ$ ]
$\omega_c$	ugaona brzina kaveza [rad/s]
$\omega_k$	ugaona brzina kotrljajnih tela [rad/s]
$\omega_{sp}$	ugaona brzina klizanja [rad/s]
$\Omega$	ugaona brzina vretena [rad/s]
$\delta_n$	normalna pomeranja kotrljajnih tela duž linije kontakta [ $\mu\text{m}$ ]
$\delta_u$	kontaktne deformacije na unutrašnjoj stazi kotrljanja [ $\mu\text{m}$ ]
$\delta_s$	kontaktne deformacije na spoljašnjoj stazi kotrljanja [ $\mu\text{m}$ ]
$\varepsilon_k$	toplotonno širenje kotrljajnih tela [ $\mu\text{m}$ ]

---

## 1.0 UVOD

Od davnina čovek je poznavao princip funkcionisanja ležaja kroz naivne, prirodne pojave oblika: klizanje po zaledjenj površini i kotrljanje po drvenim oblicima kao alternative dizanju i nošenju. Počeci primene kotrljajnih ležaja, odnosno elemenata koji se koriste u kotrljajnim ležajima kakve danas poznajemo, vezuju se za sam početak razvoja ljudske civilizacije, odnosno kada je čovek primetio da mu je potreban manji napor da bi teret vukao preko kotrljajnih „tela“ nego da ga vuče preko površine.

Konkretna upotreba ležaja zaživila je tek nakon industrijske revolucije. Konstruktori su se na početku pre opredeljivali za klizne ležaje jer se tehnologija njihove izrade brže razvijala. Tokom šezdesetih godina prošlog veka počinje ekspanzija upotrebe kotrljajnih ležaja. Razlog za porast upotrebe ovih ležaja u vezi je sa razvitkom specijalnih čelika. Upravo ovi čelici su omogućili izradu kvalitetnijih kotrljajnih ležaja, dok je razvoj mašina alatki omogućio postizanje veoma precizne geometrije elemenata ležaja što je značajno produžilo vek ležaja.

Kotrljajni ležaji su jedni od najrasprostranjenih mašinskih elemenata. Gotovo da nema mašine, aparata ili uređaja, a da u svojoj konstrukciji ne sadrže veći ili manji broj kotrljajnih ležaja. U mnogim slučajevima se smatraju kritičnim elementima u sklopu, od čijih radnih sposobnosti u mnogom zavisi funkcionalnost, pouzdanosti i eksplataciona svojstva celokupnog sklopa u koji se ugrađuju. Međutim, kvalitet ležaja sam za sebe nije dovoljan za ostvarenje svih zahteva koji se pred njega postavljaju. Samo pod idealnim uslovima kotrljajni ležaji mogu da ostvare sve svoje projektovane karakteristike.

Već u samom projektovanju ležaja veoma je važno sistematski predvideti međusobno povezane uticaje statičkih, dinamičkih i topotnih karakteristika za različite uslove eksplatacije. Efekti statičkog, dinamičkog i topotonog ponašanja ležaja moraju sa velikom izvesnošću biti predviđeni još u fazi projektovanja. Za postizanje najpovoljnije konstrukcije, definisani statički, dinamički i topotni model mora da uzima u obzir veliki broj parametara koji utiču na ponašanje odgovarajućeg ležaja. Za ocenu valjanosti pojedinih konstrukcionih rešenja postoji niz kriterijuma sa značajnim međusobnim razlikama, što još više ukazuje na aktuelnost ove problematike kako sa teorijskog tako i sa praktičnog stanovišta. Problematika identifikacije ponašanja proizvoda u eksplataciji još u fazi projektovanja i danas predstavlja područje interesovanja velikog broja istraživača, posebno u domaćim uslovima gde primena savremenih metoda i opreme još uvek nije na zadovoljavajućem nivou.

Razvijeno programsko rešenje je namenjeno za utvrđivanje uticaja kostrukcionih (zazora/preklop, prednaprezanja, krutosti), tehnoloških (hrapavosti, talasastosti) i eksplatacionih parametara (temperature, broja obrtaja) na statičko i dinamičko ponašanje kugličnih ležaja/ležajnih sklopova, odnosno identifikaciju ponašanja u eksplataciji i određivanje veka. Ovo omogućava da se još u fazi projektovanja sa što većom pouzdanošću predvedi ponašanje ležaja u eksplataciji.

## 2.0 NAUČNO-STRUČNE PODLOGE TEHNIČKOG REŠENJA

Kuglični ležaji predstavljaju složen sistem za modelovanje sa velikim brojem ulaznih i izlaznih parametara i kompleksnim fizičkim i hemijskim procesima koje se javljaju tokom njihove eksploatacije. Iz tih razloga je praktično nemoguće formirati jedan sveobuhvatni matematički model za analizu ponašanja ležaja. Zbog toga se u praktičnoj primeni pri postavljanju matematičkog modela, pažnja više posvećuje parametrima koji utiču na ponašanje ležaja u eksploataciji [51]. Najvažniji parametri koji utiču na ponašanje ležaja su: raspodela opterećenja na kotrljajnim telima, veličine kontaktnih napona i deformacija, promena ugla kontakta, zazora ili preklop, temperature, nivo vibracije i geometrijska nesavršenost staza kotrljanja i sl. [3]. Razmatranje ovih parametara zahteva podelu sveobuhvatnog statičko-toplotno-dinamičkog matematičkog modela na podmodele, u zavisnosti od karaktera fizičkih pojava koje oni opisuju i ponašanja koje se želi sa njima ispitati [51].

Matematički model za analizu ponašanja ležaja se obično se sastoji od pet podmodela: statičkog, dinamičkog, tribološkog, topotognog i modela za određivanje životnog veka ležaja [51-52]. Statičkim modelom se definišu karakteristike raspodele spoljašnjeg opterećenja, intenzitet opterećenja pojedinih kotrljajnih tela, ugao kontakta kotrljajnih tela sa stazama kotrljanja, kao i krutost samog ležaja. Dinamički model predstavlja sistem jednačina kretanja prstenova i kotrljanih tela u funkciji vremena. Najvažnija izlazna karakteristika iz ovog modela jeste spektar vibracija elemenata ležaja. Tribološki model opisuje trenje i habanje staza kotrljanja ležaja. Ovaj model je veoma složen, jer obuhvata statiku, kinematiku i dinamiku ležaja, kao i hidrodinamičko podmazivanje. Iz tih razloga ne postoji jedan opšti tribološki model. Topotni model definiše zakone nastajanja i rasprostiranja topote u elementima ležaja. Proračun temperaturnih polja i topotnih dilatacija elemenata ležaja danas se relativno lako rešava pomoću metode konačnih razlika ili metode konačnih elemenata. Model za određivanje veka ležaja ima za cilj da utvrdi vek otkaza ležaja, kao i statičku i dinamičku nosivost ležaja. Prvi model za određivanje veka ležaja je model Palmagren-Ludenverg-a, zasnovan na teoriji razaranja Weibull-a. Ovaj model je kao takav postao i osnova ISO standarda za određivanje veka ležaja. Određeni broj autora se bavio ovom problematikom Harris [15-17], O Brieni [41], Zaretsky [50]. Svi oni su uglavnom definisali modifikovane modele putem raznih korektivnih faktora na osnovni model razaranja kotrljajnog ležaja. Međutim, eksperimentalna istraživanja su pokazala da se nijedan od njih ne može generalizovati i primeneti na sve ležaje i njihove uslove rada.

Cilj razvoja matematičkih modela za analizu ponašanja kotrljajnih ležaja je sveobuhvatnije opisivanje karakteristika i ponašanja ležaja u eksploracionim uslovima. Ovo je moguće uz uzimanje što je moguće većeg broja uticajnih faktora i pojava koji se javljaju tokom eksploatacije. S druge strane, matematički model treba da uspostavi zavisnost između ulaznih i izlaznih parametara ležaja koji neposredno opisuju kvalitet ležaja u skladu sa konstrukcionim, tehnološkim i eksploracionim zahtevima [52].

Prethodno navedene činjenice su osnovni razlozi za neprestanu aktuelnost istraživanja u oblasti ponašanja kotrljajnih ležaja. U cilju poboljšanja konstrukcije ležaja i uležištenja veliki broj autora se bavi problematikom razvoja matematičkih modela za analizu ponašanja ležaja u eksploraciji. Ova istraživanja se mogu podeliti u tri oblasti:

1. Matematički modeli za istraživanje statičkog ponašanja
2. Matematički modeli za istraživanje topotognog ponašanja
3. Matematički modeli za istraživanje dinamičkog ponašanja

## 2.1 Matematički modeli za istraživanje statičkog ponašanja

Širok teorijski pregled problematike kotrljajnih ležaja prikazuje *Harris T.A* [15-17] u knjizi *Rolling Bearing Analysis*. Od trenutka pojavljivanja do danas ova knjiga za većinu istraživača u svetu predstavlja osnovnu literaturu u oblasti proračuna kotrljajnih ležaja. *Harris, T.A., Michael N. K.* [16] daju osnovne podloge u oblasti primene, konstrukcije i osobina kotrljajnih ležaja. U knjizi su za različite tipove detaljno objašnjene i matematički opisane teorijske postavke unutrašnje i spoljašnje geometrije ležaja, raspodele opterećenja, kontaktnih napona i deformacija, kinematike, trenja i podmazivanja ležaja, kao i karakteristike materijala za ležaje. U daljem radu *Harris, T.A., Michael N. K.* [17] se bave primenom ležaja u ekstremnim uslovima rada, ležajima opterećenim izrazitim dinamičkim i složenim opterećenjem, kao i visokobrzinskim ležajima. Autori su obradili nekoliko jedinstvenih tema, uključujući i matematičke modele za raspodelu opterećenja u uslovima visokih brojeva obrtaja, kombinovanog opterećenja, uzimajući u obzir inercijalne sile koje se javljaju pri obrtanju kuglica. Takođe se u predloženim matematičkim modelima uzima u obzir i uticaj podmazivanja i trenja na stazama kotrljanja ležaja

Ranih 60-tih godina dvadesetog veka *Jones* [31] je predstavio opšti model ležaja kao složen mehanički sistem za određivanje elasto-deformacionih osobina idelanih ležaja bez grešaka makro i mikro geometrije prstenova i kuglica. Ovaj model je dalje u svojim radovima razvijao *Harris* [16]. Osnovu modela čini teorija kontaktnih napona Hertz-a. Pri tome se u obzir uzimaju centrifugalne sile i giroskopski moment koji deluju na kuglicu. Na osnovu statičke ravnoteže kontaktnih i inercijalnih sila, na svakoj kuglici ležaja formira se sistem jednačina koji se rešava u zavisnosti od vremena. Ovaj model razjašnjava mehaniku kotrljajnih ležaja, kao statički nelinearnog elastičnog sistema. Nedavno je *Houpert* [24,25] proširio rad *Harris-a* na sistem sa pet stepeni slobode za jednoredne kuglične ležaje, pri čemu su ulazni podaci relativna pomeranja prstenova, a ne sile i momenti.

Danas se veći broj autora bavi razmatranjem kontaktnih sila i deformacija na bazi Hertz-ove teorije kontakta [16, 45], ili na bazi eliptičnih integrala [2], [13]. Analitički pristup određivanja veze između sila i deformacija je prikazan u radu [6], koji se delimično bazira na kinematici kugličnih ležaja pri delovanju sila usled obrtanja kotrljajnih tela. Mnogi autori su probleme ponašanja kugličnih ležaja, kao što su opterećenja [36], matrice krutosti [24] ili promene ugla kontakta [1], [45] rešavali numeričkim metodama. *Tamura i dr.* [44] su teorijski odredili krutost kugličnog ležaja opterećenog konstantnom koncentričnom radijalnom silom. *Gargiulo* [14] je razvio novi sistem jednačina za određivanje početne krutosti kotrljajnih elemenata ležaja.

*Antoine i saradnici* [1,2] predlažu dve nove, približne, metode za određivanje ugla kontakta na spoljašnjem i unutrašnjem prstenu ležaja, u zavisnosti od prednaprezanja i brzine, za slučajeve promenljivog prednaprezanja. Metode baziraju na Hertz-ovo teoriji kontakta. Polazi se od predpostavke da je sila prednaprezanja konstanta i da ne utiče na brzinu i promenu ugla kontakta. Pri rešavanju sistema jednačina, smatra se da na određenoj brzini, za određeno prednaprezanje, dolazi samo do poništavanja aksijalnog zazora, odnosno da nema aksijalnih deformacija.

S obzirom da se Hertz-ova teorija kontakta bazira na velikom broju tabelarnih podataka, a ona daje osnovne ulazne podatke za *John-Harris-ove* metodu *Kang i dr.* [32] modifikuju ovu metodu. Korišćenjem metode konačnih elemenata i empirijskih relacija modifikovana je veza (eksponent) između opterećenja i deformacija u Hertz-ovo teoriji kontakta.

*Bourdon A. i dr.* [6,7], predlažu opštu metodologiju za nelinearno modelovanje ponašanja kugličnih i valjkastih ležaja. Razvijeni su modeli matrice krutosti složenih mehaničkih sistema, s ciljem da se predviđi statičko ponašanje, opterećenje i raspodela napona. Metod je primjenjen za određivanje deformacija prstena ležaja za menjaće automobila i helikoptera. Za sve razmatrane slučajeve, deformacije prstena ležaja su značajno uticale na promenu ugla kontakta i raspodelu opterećenja.

## 2.2 Matematički modeli za istraživanje toplotnog ponašanja

Toplotne karakteristike ležaja se menjaju u zavisnosti od uslova, kao što su: početni zazori, toplotne deformacije elemenata ležaja i uslova hlađenja. Sam ležajni sklop se sastoji od kotrljajnih elemenata, prstenova, i toplotne koja se prenosi kroz njih. Toplota izaziva promenu kontaktnog pritiska u ležaju, čime utiče na granične uslove kao što su: količina razvijene toplote, toplotna kontaktna provodljivost, dinamička krutost, prigušenje.

Karakterizaciju toplotnih izvora i ponora na sklopu glavnog vretena među prvima je izvršio *Bossmanns* [4], uključujući u računarski model, sve toplotne izvore i ponore kao i mehanizme prenosa toplote kod ležaja u zavisnosti od broja obrtaja i prednaprezanja. Razmatrano je uležištenje sklopa glavnog vretena hibridnim ležajima (ležaji sa keramičkim kuglicama). Pri postavljanju matematičkog modela centrifugalni i giroskopski efekti u ležaju su zanemareni, ali su uključeni svi vidovi prenosa toplote. Primjenom definisanog modela moguće je predvideti porast temperature na ležajima za širok opseg brojeva obrtaja.

Takođe, *Bossmanns i Tu* u svom radu [5] predstavljaju model toka energije, što je prvi korak za definisanje celokupnog toplotno-mehaničkog modela visokobrzinskih ležaja. Ovaj model toka energije uključuje osnovne izvore energije ležaja kao što su: razvijena toplota na ležajima sa kosim dodirom pod uticajem broja obrtaja, razvijena toploda usled podmazivanja, razvijena toplota od pogonskog elektromotora i razvijena toplota usled viskoznog smicanja vazduha pri obrtanju elemenata ležaja. Prednaprezanje ležaja je u matematičkom modelu zanemareno.

*Chi, Tu i Kamman* [11] su toplotni model proširili menjajući krutost ležaja i prednaprezanje pri čemu su konstatovali da porast temperature utiče na promenu sila prednaprezanja i do 44 %. Na taj način su dobili kombinovani toplotno-mehanički model. Ovaj kombinovani model su analizirali metodom konačnih elemenata. Cilj analize metodom konačnih elemenata je da se objasni promena dinamičkih karakteristika vretena nakon što dođe do toplotnog širenja.

*Jędrzejewski, J. i saradnici* [29,30] su sproveli računarsko modelovanje (primenom metoda konačnih elemenata i metoda konačnih razlika) toplotnog ponašanja visokobrzinskih glavnih vretena uležištenih kugličnim ležajima sa kosim dodirom sa čeličnim i keramičkim kuglicama pri različitim uslovima hlađenja. Autori takođe konstatuju da dolazi do promene prednaprezanja ležaja sa promenom temperature za obe vrste razmatranih ležaja.

*Kim S., i Lee S.*, u [33] prikazuju matematički model za predikciju toplotno-elastičnog ponašanja i višekriterijumsku optimizaciju sklopa glavnog vretena uležištenog kugličnim ležajima sa kosim dodirom u zavisnosti od broja obrtaja, geometrijskih parametara, uslova hlađenja i toplotnih deformacija. Numeričke relacije za nestacionarno toplotno-elastično ponašanje, kao i optimizacijske promenljive su definisane korišćenjem eksperimentalne metodologije.

U većini prethodnih radova toplotna otpornost, kontakta otpornost i promena količine razvijene toplotne sa temperaturom je zanemarivana pri analizama toplotnog ponašanja ležaja. Da se u većini slučajeva ove karakteristike ne mogu zanemariti pokazuju *Min X. i dr.* [39] koji u radu definišu model na osnovu modela iz rada [4], s tim da analiziraju porast temperature na kućištu u blizini ležaja. U modelu je uzeta u obzir i količina generisane toplotne na ležajima, kao jedan od glavnih izvora toplotne. Poređenjem sa eksperimentalnim rezultatima dolazi se do zaključka da ovakav model daje približnije rezultate eksperimentalnim nego model bez ova dva parametra.

*Sun, M. i dr.* [43], definišu matematički model ležaja, koji obuhvata izvor toplotne promenljiv sa vremenom, kontaktnu provodljivost i prednaprezanje. Za istraživanje uticaja toplotnih deformacija na krutost glavnog vretena, ležaji su definisani tako da su statičke i dinamičke karakteristike predstavljene prema konceptu toplotno-elastične zatvorene petlje. Na ovom modelu je prvo variran kontaktni pritisak u ležaju, koji značajno utiče na performanse mašine alatke, i može biti izračunat na osnovu toplotnih i mehaničkih karakteristika kao što su: početni zazor između spoljašnjeg prstena i kućišta i unutrašnjeg prstena i glavnog vretena, izvori toplotne i uslovi hlađenja.

## 2.2 Matematički modeli za istraživanje dinamičkog ponašanja

Istraživanja dinamičkog ponašanja kotrljajnih ležaja obavljaju se u cilju smanjenja buke i vibracija, povećanja radnog veka, povećanja krutosti, brzohodnosti i tačnosti obrtanja, te razvoja metoda za dijagnostiku i nadzor ležaja. S obzirom da na ležajni sklop deluju sile promenljivog intenziteta, pravca i smera pri kotrljanju tela po stazama kotrljanja nastaju elastične deformacije. Ove deformacije ne spadaju u čisto periodične vibracije, zbog nelinerane zavisnosti između kontaktnih deformacija i kontaktnih sila. Ovakve vibracije će nastati i pri idealnoj geometriji ležaja.

Delovanje inercijalnih sila na kotrljajna tela se prenosi na kavez. Usled delovanja ovih sila na kavez, kuglice ne zauzimaju jednake razmake (nisu podjednako raspoređeni) što takođe ima uticaja na celokupno dinamičko ponašanje ležaja i sklopa u koji je ugrađen. Matematički model nelinearog kontakta između kaveza i kuglica pomoću Hertz-ove teorije kontakta prvi razmatraju *Nataraj i Harsha* [40], pri čemu Harsha [22] u matematički model uvodi i uticaj broja kotrljajnih tela koja prenose opterećenje.

Matematički model za analizu vibracija usled elemenata strukture ležaja pod uticajem zazora je prikazao *Harsha S. P.* [23]. Model je definisan za tangencijalno kretanje kotrljajnih elemenata, kao i unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena, koristeći nelinearne izvore, kao što su Hertz-ova kontaktne sile i unutrašnji radikalni zazor. Autor uzima u obzir i raspored opterećenja od bezkontaktnog do kontaktnog stanja između kotrljajnih elemenata i spoljašnjeg prstena. Kontakt između kotrljajnih elemenata i prstena se smatra kao nelinarna opruga, koja deluje jedino pri sabijanju, simulirajući kontaktne deformacije i rezultujuće sile. Nelinarne krutosti se proračunava primenom relacija Hertz-ove teorije za elastične kontaktne deformacije. Analiziran je i uticaj radikalnog zazora na ponašanje kotrljajnih elemenata, koja pokazuju periodična, kvazi – periodična i haotična kretanja.

*Upadhyay i dr.* [46] proširuju istraživanje iz rada [23], ispitujući dinamičko ponašanje neuravnoteženog rotora uležištenog kotrljajnim ležajima sa prigušenjem, stavljajući poseban akcenat na nelinearne aspekte. Uzima se u obzir nelinarnost sistema rotor – ležaj, uglavnom usled Hertz-ovog kontakta, i uticaja radikalnog zazora. Modelovanje je definisano kao oscilovanje sistema opruga – masa – prigušenje. Kretanje neuravnoteženog rotora se kategorizuje odnosom

prinudna/sopstvena frekvencija sistema, kao harmonična, pod harmonična, kvazi periodična i haotična. Ponašanje kotrljajnih elemenata ležaja je od velikog značaja za većinu mašina. Usled postojećih različitosti montaže i unutrašnjih zazora u ležaju, prisutno je značajno nelinearno ponašanje u slučaju sistema uležištenja rotacionih delova. Međutim, pošto su ugaone brzine promenljive, u praktičnim pojavama na svim rotacionim uređajima, potrebno je razmotriti i njihov uticaj. Uticaj promene ugaone brzine ležaja su izvršili *Lioulios i Antoniadis* [37]. Autori, razmatraju dinamički model horizontalnog rotora, koji je uležišten kugličnim ležajima sa radijalnim zazorom, uzimajući u obzir kontaktnu silu između kuglica i prstena, kao i uticaj unutrašnjeg radijalnog zazora. *Villa i dr.* [47] prikazuju nelinearnu dinamičku analizu fleksibilnog rotora, koji je neuravnotežen i uležišten kugličnim ležajima. Kotrljajni elementi ležaja se modeluju kao model sa dva stepena slobode, pri čemu se uzima u obzir kinematika kotrljajnog elementa, kao i unutrašnji zazor i *Hertz-ova* nelineranost usled kontaktnih elemenata. Kako bi se izvršio proračun periodičnog odziva nelinearnog sistema, u radu je primenjena metoda harmonijskog balansa.

*Čermelj i Boltemar* [9] među prvima uvode integrisani pristup u prenosu vibracija ležaja u generalizovanom smislu, gde se ležaj predstavlja kao trodimenzionalni model sa tri stepena slobode. Na osnovu dinamičke analize na modelu sa više stepeni slobode, prethodno utvrđeni trodimenzioni model ležaja korišćen je u sintezi frekventnog domena sa analitičkim, numeričkim i eksperimentalnim modalnim analizama, u cilju dobijanja svih dinamičkih osobina sistema. Ovakav pristup razgraničava nelinearni model ležaja od linernog modela preostalih elemenata sistema kao što su vreteno i kućište.

*Crawford i Long* [13] razvijaju analitički dinamički model kugličnih ležaja uz razmatranje uticaja kinematskih i statičkih parametara na dinamičko ponašanje ležaja. Ovim modelom se mogu analizirati napon i naprezanje elemenata pod opterećenjem usled: (1) prednaprezanja, (2) spoljašnjeg aksijalnog, radijalnog i opterećenja momentom, (3) centrifugalnog i giroskopskog opterećenja kotrljajnih tela. Model sa šest stepeni slobode, za kretanje kaveza je opisan u rotacionom (pokretnom) koordinatnom sistemu, koji u velikoj meri pojednostavljuje kvazi-statičke relacije u većini slučajeva.

*Choudhury i Tandon* [12] predstavljaju teorijski model za određivanje odziva vibracija, razmatrajući uticaj talasastosti na stazama kotrljanja. *Meyer i dr.* [38] prikazuju matematičku tehniku za predviđanje komponenti spaktra vibracija nastalih zbog uticaja zakošenja i ekscentričnosti staza kotrljanja, i talasastosti spoljašnje staze kotrljanja. Matematičke relacije su izvedne za radijalna pomeranja stacionarne staze kotrljanja. *Jang i Jeong* [26] predlažu model sa pet stepeni slobode za ispitivanje uticaja talasastosti na vibracije ležaja. Oni razmatraju i uticaj centrifugalne sile i giroskopskog momenta na kuglice. *Jang i Jeong* [27] postavljaju analitički model za određivanje vibracija usled talasastosti kuglica ležaja, pri čemu uzimaju u obzir centrifugalnu silu i giroskopski moment kuglice. Talasastost kotrljajnog elementa je modelovana sinusoidnom funkcijom koja se nalazi u poziciji vektora centra krivine putanje. *Hertz-ova* teorija kontakta je primenjena pri proračunu elastičnih deformacija i nelinearnih sila kontakta. Centrifugalna sila i giroskopski moment kuglice i talasastost kotrljajnih elemenata obuhvaćeni su kinematskim ograničenjima i jednačinom ravnoteže sila za kuglicu. Analitički model sa dva stepena slobode za dobijanje nelinearnog odziva vibracija pod uticajem talasastosti kotrljajnih tela i broja kotrljajnih tela razvijaju *Harsha i Kankar* [19]. Dalje, isti autor u radu [20], na istom matematičkom modelu istražuje uticaj talasastosti staza kotrljanja na nelinearni odziv vibracija kugličnog ležaja. Za definisanje komponenti talasastosti autori su razvili računarski program, koji talasastost prikazuje kao sinusnu funkciju.

U prethodnim radovima su razmatrani pojedinačni uticaji nelinearnih parametara ležaja na njegovo dinamičko ponašanje. Matematički model koji uzima u obzir izvore nelinearnosti poput Hertz-ove kontaktne sile, talasastosti staza kotrljanja i kotrljajnih tela, promenu deformacija i unutrašnjeg radijalnog zazora, kao rezultat prelaska iz bezkontaktnog stanja u kontaktno stanje između kotrljajnih elemenata i prstenova, prikazali su *Harsha i dr.* u radu [20] za kuglične ležaje i *Wang i dr.* [48] i *Harsha* u radu [21] za valjčaste ležaje. U radovima su svojstva nelinearne sile ležaja, koja deluje na sistem, redukovana odgovarajućom integracijom, kako bi se povećala numerička stabilnost i skratilo vreme analize sistema. Autori konstatuju da ležaji pri razmatranju pomenutih parametara pokazuju periodično, kvazi – periodično i haotično kretanje.

*Changqing i Qingyu* [10] prikazuju opšti dinamički model za ispitivanje dinamičkih karakteristika sistema rotora, koji je uležišten kugličnim ležajima, pod uticajem unutrašnjeg zazora i talasastosti spoljašnje staze kotrljanja koja je u ovom slučaju obrtna. Matematički model obuhvata uticaje centrifuglane sile kuglice i giroskopskog momenta. Brzina kaveza se smatra promenljivom u odnosu na vremenski parametar, koji je u vezi sa obimnom brzinom kuglica.

### **3.0 TEORIJSKE PODLOGE ZA RAZVOJ PROGRAMSKOG REŠENJA ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA**

Sveobuhvatna analiza ležaja podrazumeva kompleksno ispitivanje parametara koji utiču na ponašanje ležaja u eksplotaciji. Za ovakve analize se moraju koristiti metode koje omogućavaju uzimanje u obzir što većeg broja parametara koji definišu elemente strukture ležaja i uslove za njegovo funkcionisanje pri različitim eksplotacionim uslovima. Posebno treba uzeti u obzir uticaj broja obrtaja, geometrijskih nesavršenosti i spoljašnjih opterećenja na dinamičke karakteristike ležaja, uticaj promene elastičnih deformacija i dinamičkih karakteristika usled promene toplotnog stanja ležaja.

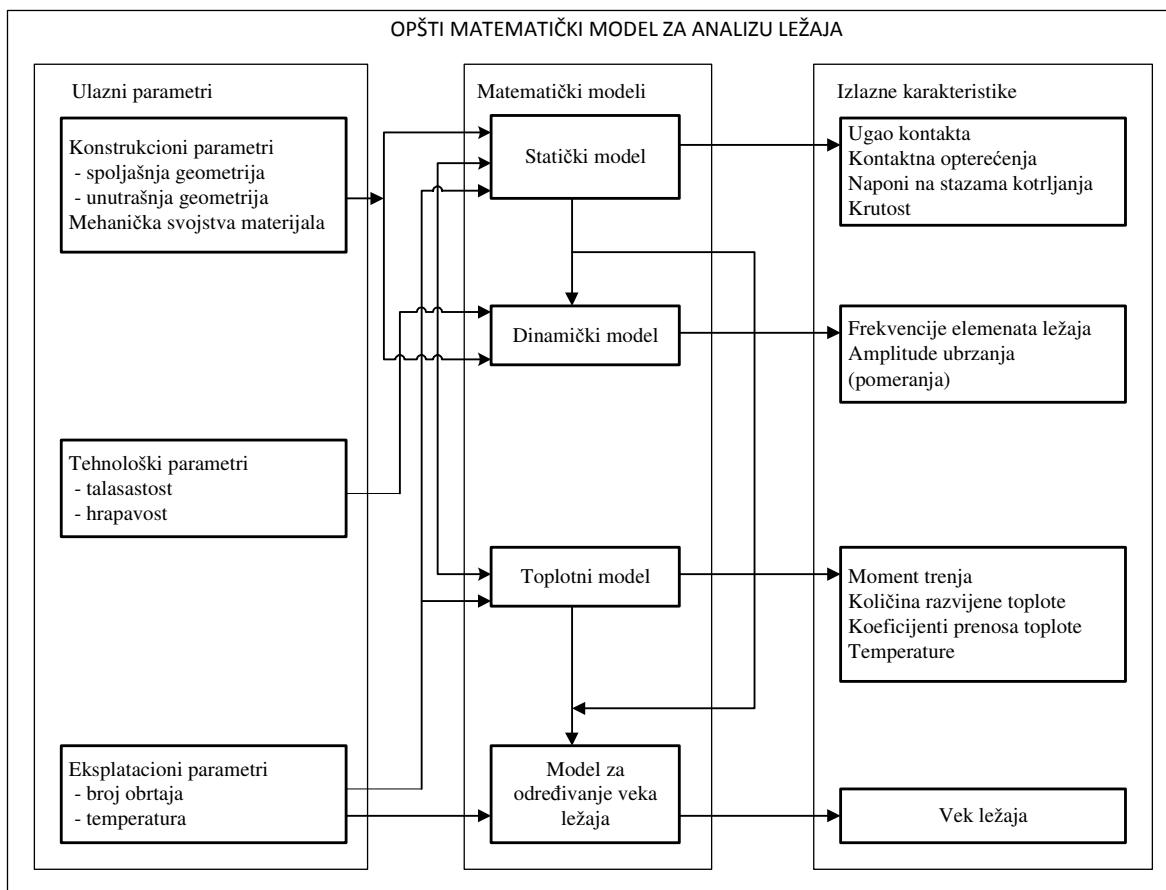
Kotrljajni ležaji su praktično složeni za simulaciju, zbog nelinearnosti samog sistema, složenosti mehaničkih pojava i fenomena koji se dešavaju u samom ležaju tokom rada. Da bi se ispitao uticaj konstrukcionih, tehnoloških i eksplotacionih parametara na ponašanje kugličnih ležaja, razvijen je opšti model za kompleksnu analizu ponašanja kugličnih ležaja. Opšti model je definisan na bazi sledećih matematičkih modela:

1. statičkog,
2. toplotnog,
3. dinamičkog i
4. modela za određivanje veka ležaja

#### **3.1 Opšti matematički model za analizu ponašanja kugličnih ležaja**

Za analizu ponašanja kugličnih ležaja razvijen je matematički model sa pet stepeni slobode. Opšti algoritam za sveobuhvatnu analizu ponašanja kugličnih ležaja sa kosim dodicom je prikazan na slici 1. Ulazne karakteristike predstavljaju osnovne konstrukcionalno-tehnološko-eksploataционе karakteristike kotrljajnog ležaja kao što su: početno prednaprezanje, unutrašnja geometrija ležaja, materijal prstenova i kotrljajnih tela, radni uslovi itd.. Kao izlazne karakteristike dobijaju se parametri koji definišu i određuju stanje kotrljajnih ležaja.

Određivanje elastično-deformacionih karakteristika ležaja vrši se u okviru statičkog modela. Ako se razmatra uticaj temperature, onda se u toplotnom modelu određuju količina generisane toploće i raspored temperatura na elementima ležaja u zavisnosti od elastično-deformacionih karakteristika. U tom slučaju se u statičkom modelu izračunavaju stvarna kontaktna opterećenja i prednparezanje ležaja na osnovu početnih vrednosti i temperatura na elementima ležaja. Na osnovu prethodnih parametara se određuje krutost ležaja bez ili sa uticajem temperature. Ako krutost ležaja zadovoljava unapred definisane vrednosti, onda se u dinamičkom modelu određuju dinamičke karakteristike ležaja, dok se u modelu za određivanje veka, izračunava vek ležaja sa ili bez uticaja temperature. U slučaju da krutost ležaja ne zadovoljava, vrši se promena ulaznih parametra kao što je: unutrašnja geometrija ležaja ili početni preklop/zazor. U nastavku će biti prikazane teorijske postavke za matematičko modelovanje ponašanja kugličnih ležaja.



Slika 1. Matematički model za kompleksnu analizu ponašanja ležaja

### 3.2 Teorijske osnove programskog rešenja za analizu statičkog ponašanja

U zonama dodira kotrljajnih tela i staza kotrljanja pri kontaktnim opterećenjima nastaju naponi u glavnim pravcima koji su daleko iznad uobičajenih kod ostalih mašinskih elemenata. Statički posmatrano, oslonac staza kotrljanja-kotrljajno tela-staza kotrljanja, predstavlja statički neodređeni sistem. Takav sistem je teško rešiv uobičajenim matematičkim metodama, i postaje veoma kompleksan kada se u obzir uzmu i uticaji zazora u ležaju kao i promena ugla kontakta usled dejstva, kako statičkih sila tako i centrifugalnih sila i giroskopskog momenta.

Matematički model za analizu statičkog ponašanja kugličnih ležaja je razvijen na bazi *Hertz-ove teorije kontakta* i *John-Harris-ove raspodele opterećenja na kotrljajna tela*. Programsko rešenje za analizu statičkog ponašanja omogućava određivanje krutosti u svim

pravcima za svako kotrljajno telo, statičke i dinamičke nosivosti na bazi ekvivalentnih kontaktnih opterećenja za svaku stazu kotrljanja. Matematički model je proširen uvođenjem uticaja temperaturnih dilatacija, preklop/zazor i talasastosti staza kotrljanja u statičke jednačine ravnoteže. U matematičkom modelu je definisana i nova seobuhvatna matrica krutosti koja uzima u obzir prekop/zazor u ležaju kao i topotne deformacije elemenata ležaja. Takođe u modelu je uključeno i delovanje sila inercije (centrifugalna sila i giroskopski moment) na kotrljajna tela.

### 3.2.1 Kontaktne sile, naponi i deformacije kugličnih ležaja

Osnovu za određivanje kontaktnih napona i sila na kontaktnim površinama kotrljajnih tela i staza kotrljanja čini klasična *Hertz-ova teorija kontakta*, koja se zasniva na utvrđenoj zavisnosti između geometrije kontaktnih površina i relativnog pomeranja elemenata ležaja. *Hertz-ova teorija kontakta* se zasniva na sledećim prepostavkama [15]:

1. Materijali delova u kontaktu su homogeni i izotropni,
2. Površine delova u zoni kontakta imaju kontinualan geometrijski oblik,
3. Opterećenje delova u kontaktu ima pravac zajedničke normale u tački kontakta,
4. Opterećenje koje deluje na kotrljajna tela izaziva u oblasti kontakta samo elastične deformacije.

Prema *Hertz-ovojo teoriji*, kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja kod kugličnih ležaja se ostvaruje u neopterećenom stanju u tački. Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja u zoni kontakta formira se kontaktna površina oblika elipse za kuglične ležaje. Oblik i veličina kontaktne površine zavisi od intenziteta spoljašnjeg opterećenja, elastičnih osobina elemenata ležaja i radiusa zakrivljenosti staza kotrljanja. Na osnovu prethodnog i pod pretpostavkom da oba tela u tački kontakta imaju zajedničku tangentnu ravan i zajedničku normalu u kojoj leži sila opterećanja, kontakt između kotrljajnog tela i staza kotrljanja se definiše preko:

1. Ekvivalentnog radijusa zakrivljenosti

Za kontakt sa unutrašnjom stazom kotrljanja, ekvivalentni radijus zakrivljenosti u pravcu glavne ose eliptičnog kontakta  $R_x$  i pomoćne ose  $R_y$  je definisan kao:

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{d_k}{2}(1 - \gamma_u) = \rho_{12} \\ R_y &= \frac{d_k}{2} \frac{f_u}{f_u - 1} = \rho_{11} \end{aligned} \quad (1)$$

gde su:  $\gamma_u = d_k \cos \alpha_{u(i)} / d_k$ ;  $f_u = r_u / d_k$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, Z$

Za kontakt sa spoljašnjom stazom kotrljanja  $R_x$  i  $R_y$  su:

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{d_k}{2} \frac{f_s}{f_s - 1} = \rho_{112} \\ R_y &= \frac{d_k}{2}(1 + \gamma_s) = \rho_{111} \end{aligned} \quad (2)$$

gde su:  $\gamma_s = d_k \cos \alpha_{s(i)} / d_k$ ;  $f_s = r_s / d_k$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, Z$

2. Razlike zakrivljenosti

$$F_{(\rho)} = \frac{(\kappa^2 + 1) \cdot E' - 2 \cdot F'}{(\kappa^2 - 1) \cdot E'} \quad (3)$$

gde su  $F'$  i  $E'$  kompletni eliptični integrali prve i druge vrste respektivno.

$$F' = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - (1 - 1/\kappa^2) \sin^2 \psi \right]^{-1/2} d\psi \quad (4)$$

$$E' = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - (1 - 1/\kappa^2) \sin^2 \psi \right]^{1/2} d\psi \quad (5)$$

Prema Hariss-u [16] metodom najmanjih kvadrata linearnom regresijom, se dobijaju pojednostavljena rešenja prethodnih relacija u obliku:

$$\kappa \approx 1,0339 \left( R_y / R_x \right)^{0,636} \quad (6)$$

$$E' \approx 1,0003 + \frac{0,5968}{R_y / R_x} \quad (7)$$

$$F' \approx 1,5277 + 0,6023 \cdot \ln \left( R_y / R_x \right) \quad (8)$$

Svrha definisanja zbiru i razlike zakrivljenosti je da se dva tela u kontaktu analiziraju kao elipsasti kontakt na ravnoj površini, odnosno da se definiše veza između deformacija i kontaktnih sila. Hertz-ove kontaktne sile između unutrašnje staze kotrljanja i kotrlajnih tela i spoljašnje staze kotrljanja i kotrlajnih tela se određuju na osnovu [17]:

$$Q_{u/s(i)} = \begin{cases} K_u \delta_{u(i)}^{3/2} \\ K_s \delta_{s(i)}^{3/2} \end{cases} \quad (9)$$

gde su  $\delta_{ui}$  i  $\delta_{si}$  kontaktne deformacije duž linije kontakta sa unutrašnjom odnosno spoljašnjom stazom kotrljanja, a  $i=1,2,3,\dots,Z$ . Kontaktne deformacije u ovom matematičkom modelu su određene u funkciji od  $\delta_{ui}$ ,  $\delta_{si} = f(F_p, F_a, F_r, F_c, M_g, \alpha_u, \alpha_s, G_a, W_t, t)$  čije određivanje će biti prikazano u narednom delu, u zavisnosti od vrste spoljašnjeg opterećenja.  $K_u$  i  $K_s$  su Hertz-ove normalne kontaktne krutosti unutrašnje odnosno spoljašnje staze kotrljanja i definisane su preko ekvivalentnog radijusa zakrivljenosti i geometrije ležaja kao [16]:

$$K_{u/s} = \frac{\pi \kappa E''}{3F_{u/s}} \sqrt{\frac{2E_{u/s} R_{xy_{u/s}}}{F_{u/s}}} \quad (10)$$

gde je  $E'' = 2/((1-v_p^2)/E_p + (1-v_s^2)/E_s)$  i  $R_{xy,u/s} = R_{x,u/s} R_{y,u/s} / (R_{x,u/s} + R_{y,u/s})$ .

Za eliptičnu kontaktну površinu, naponi na kontaktu sa unutrašnjom, odnosno spoljašnjom stazom kotrljanja su [16]:

$$\sigma_{u/s} = \frac{3Q_{u/s}}{2\pi a_{u/s} b_{u/s}} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a_{u/s}} \right)^2 - \left( \frac{y}{b_{u/s}} \right)^2 \right] \quad (11)$$

Maksimalni naponi na kontaktnim površinama se javljaju u geometrijskom centru eliptične površine i zamenom po x i y u relaciji 11 dobija se:

$$\sigma_{\max,u/s} = \frac{3Q_{u/s}}{2\pi a_{u/s} b_{u/s}} \quad (12)$$

gde su  $a$  i  $b$  glavna odnosno pomoćna osa eliptičnog kontakta određena preko relacija [16]:

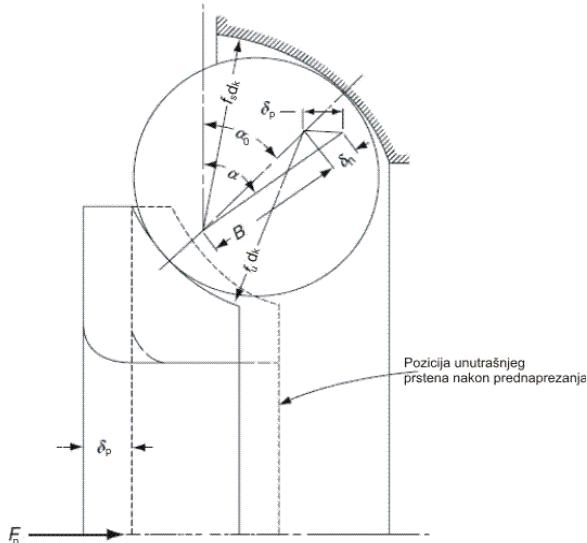
$$\begin{aligned} a_{u/s} &= \sqrt[3]{6\kappa_{u/s}^2 R_{xy,u/s} Q_{u/s} / \pi E''} \\ b_{u/s} &= \sqrt[3]{6E'_{u/s} R_{xy,u/s} Q_{u/s} / \pi \kappa E''} \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.2.2 Definisanje ugla kontakta i aksijalnog pomeranja centra ležaja usled sile prednaprezanja

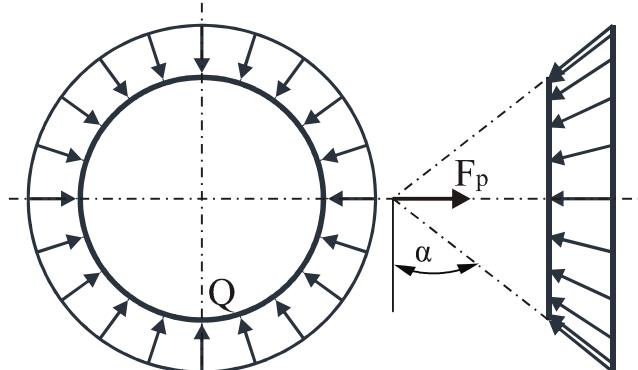
Pošto pri ugradnji ležaja nema dejstva centrifugalne sile, ugao kontakta  $\alpha$  između kotrljanog tela, spoljašnje i unutrašnje staze kotrljanja je isti. Prema tome, on je veći nakon delovanja sile prednaprezanja odnosno nakon montaže (sl. 2). Aksijalna sila prednaprezanja na unutrašnjem prstenu jednorednog kugličnog ležaja sa kosim dodirom izaziva aksijalno pomeranje  $\delta_p$ . Aksijalno pomeranje je komponenta normalnog pomeranja  $\delta_n$  kotrljajnog tela duž linije kontakta (slika 2).

$$\delta_n = A \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_p} - 1 \right) \quad (14)$$

pri čemu je  $A=Bd_k = (f_s+f_u-I)d_k$ . Kod kugličnih ležaja pod dejstvom prednaprezanja, opterećenje se raspoređuje jednakom na sve kotrljajne elemente (slika 3) [16].



Slika 2. Šematski prikaz ležaja sa kosim dodirom nakon delovanja sile prednaprezanja [16]



Slika 3. Raspored opterećenja pri delovanju sile prednaprezanja

Dakle, kontaktno opterećenje se određuje kao:

$$Q = \frac{F_p}{Z \sin \alpha_p} \quad (15)$$

Nakon montaže kugličnog ležaja sa kosim dodirom na ležaj deluje isključivo aksijalna sila prednaprezanja pa će kontaktno opterećenje biti:

$$Q = K_n \delta_n^{3/2} \quad (16)$$

gde je:

$$K_n = \left( \left( \frac{1}{K_s} \right)^{2/3} + \left( \frac{1}{K_u} \right)^{2/3} \right)^{-3/2} \quad (17)$$

Na osnovu relacija (16) i (17) se dobija:

$$Q = K_n A^{3/2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_p} - 1 \right)^{3/2} \quad (18)$$

Zamenom relacije (16) u (18) se dobija relacija za određivanja ugla kontakta nakon prednaprezanja:

$$\cos \alpha_p = \cos \alpha_0 \left[ 1 + \left( \frac{F_p}{Z K_n A^{3/2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p}} \right)^{2/3} \right]^{-1} \quad (19)$$

Relacija (19) se može rešavati iterativnim postupkom za početni uslov  $\alpha_p(0) = \alpha_0$ . Aksijalno pomeranje  $\delta_a$  je u vezi sa  $\delta_n$  i prema slici 2 određuje se kao:

$$\begin{aligned} \delta_p &= (A + \delta_n) \sin \alpha_p - A \sin \alpha_0 \\ \delta_p &= \frac{A \sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos \alpha_p} \end{aligned} \quad (20)$$

Nakon određivanja ugla kontakta i aksijalnog pomeranja centra ležaja, nelinearna aksijalna krutost jednorednog kugličnog ležaja, pod dejstvom sile prednaprezanja (krutost ležaja nakon montaže za poznatu силу prednaprezanja), se dobija preko relacije [15]:

$$K_x = \frac{dF_p}{d\delta_a} = \frac{dF_p}{d\alpha_p} \cdot \frac{d\alpha_p}{d\delta_a} \quad (21)$$

odnosno,

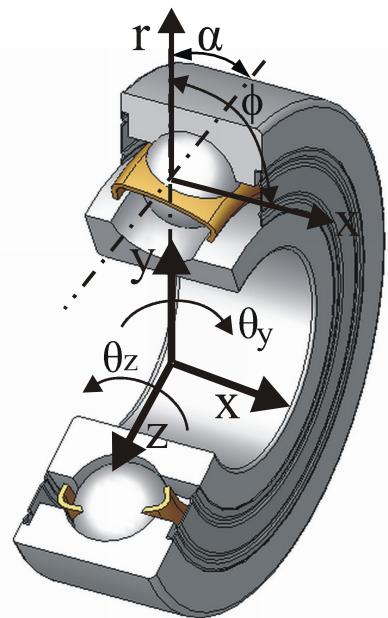
$$K_x = \frac{Z K_n}{A^{0.5} \cos \alpha_0} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_p} - 1 \right)^{0.5} \left[ \cos^3 \alpha_p (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_p) + 1.5 \sin^2 \alpha_p \right] \quad (22)$$

Početno kontaktno opterećenje  $Q(0)=K_n\delta_n^{3/2}$  i ugao kontakta  $\alpha_p$  su kontaktno opterećenje i ugao kontakta nakon delovanja sile prednaprezanja, i koriste se kao početni uslovi za model sa pet stepeni slobode koji se prikazuje u narednom delu.

### 3.2.3 Geometrija ležaja i odnos sila koje deluju na ležaj

Programsko rešenje je razvijeno na osnovu matematičkog modela koje uzima u obzir uticaj talasastosti staza kotrljanja, prekop/zazor u ležaju, kao i uticaj temperaturnih dilatacija na statičko ponašanje jednorednih i dvoredih kugličnih ležaja sa kosim dodirom.

Pri definisanju matematičkog modela korišćena su dva koordinatna sistema kao što je prikazano na slici 4. Prvi je opšti koordinatni sistem  $\{x,y,z,\theta_y,\theta_z\}^T$ , koji je povezan sa stepenima slobode obrtnog prstena i nalazi se u centru ležaja. Drugi je lokalni koordinatni sistem  $\{r, x, \phi\}^T$  koji definiše poziciju centra obrtne staze za svaki kotrljajni element i postavljen je u centru zakrivljenosti obrtne staze ležaja. Pretpostavljeno je da je centar zakrivljenosti nepokretne staze nepokretan i koristi se kao fiksna tačka.



Slika 4. Koordinatni sistemi modela sa pet stepeni slobode

Pri delovanju spoljašnjeg opterećenja, centrifugalne sile i giroskopskih momenata na kotrljajna tela, dolazi do razlike uglova kontakta između kotrljajnog tela i spoljašnje odnosno unutrašnje staze kotrljanja. Usled toga linija delovanja opterećenja nije kolinearna sa rastojanjem između centara staza kotrljanja. Na slici 5 je prikazana pozicija centra kotrljajnog tela i pozicija centra zakrivljenosti unutrašnje staze kotrljanja bez i sa delovanjem centrifugalne sile i giroskopskog momenta na kotrljajna tela u odnosu na centar zakrivljenosti spoljašnje staze, za koji se u ovom slučaju predpostavlja da je fiksiran. Na slici 5  $X_{1j}$ ,  $X_{2j}$ ,  $\alpha_{uj}$ ,  $\alpha_{sj}$ ,  $\Delta_{uj}$ ,  $\Delta_{sj}$  su aksijalne i radikalne komponente pozicije centra kotrljajnog tela, ugao kontakta sa unutrašnjom i spoljašnjom stazom kotrljanja i rastojanje između centra kotrljajnog tela i centra zakrivljenosti sa unutrašnjom, odnosno spoljašnjom stazom kotrljanja. Na osnovu ovih parametara i slike se određuje rastojanje između centra kotrljajnog tela i centra zakrivljenosti staza kotrljanja. Takođe na osnovu ovih parametara su definisane jednačine pomeranja centra ležaja, pri čemu se razmatra i uticaj geometrijskih, tehnoloških i eksplatacionih parametara.

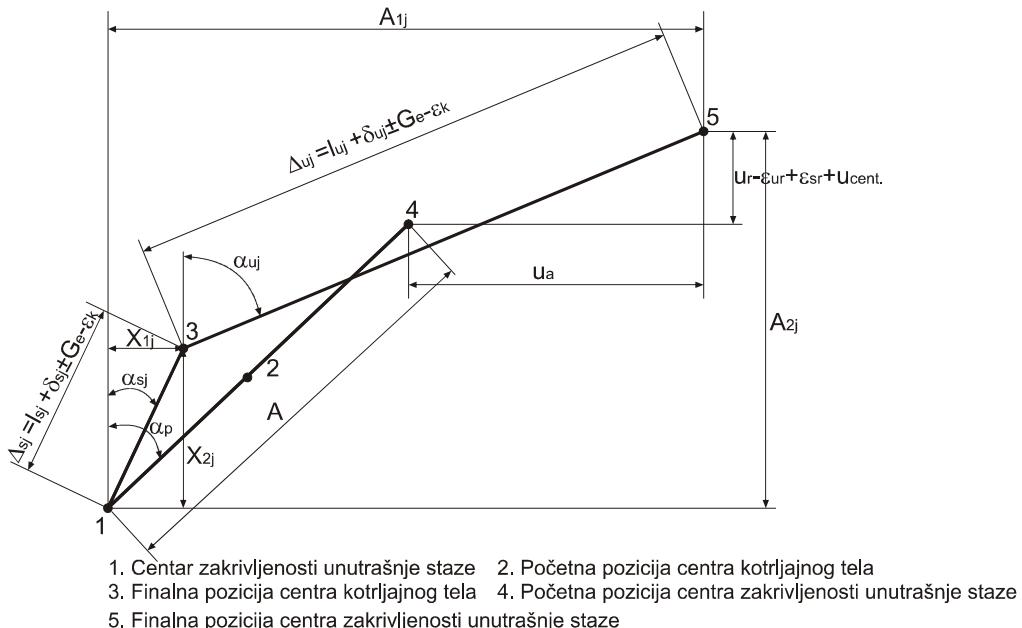
Elementi ležaja se deformišu pod dejstvom spoljašnjeg statičkog i toplotnog opterećenja. Pri zagrevanju elemenata ležaja dolazi do širenja kotrljajnog tela i prstenova. Usled ovih promena dolazi do menjanja rastojanja između centra zakriviljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja i nove pozicije centra kotrljajnog tela. Za slučaj razmatranja uticaja zazora/preklopa, temperature i bez razmatranja talasastosti kotrljajnih tela ovo rastojanje se definiše:

$$\begin{aligned}\Delta_{uj} &= (f_u - 0.5) d_k + \delta_{uj} \pm G_r - \varepsilon_k \\ \Delta_{sj} &= (f_s - 0.5) d_k + \delta_{sj} \pm G_r - \varepsilon_k\end{aligned}\quad (23)$$

U prethodnoj relaciji znak + se uzima u slučaju preklopa, a znak – u slučaju zazora. Toplotno širenje kotrljajnog tela  $\varepsilon_k$  određuje se iz relacije [35]:

$$\varepsilon_k = \alpha_k (T_k - T_0) r_k \quad (24)$$

gde su:  $\alpha_k$ -koeficijent toplotnog širenja kotrljajnog tela,  $T_k$  i  $T_0$  krajnja i početna temperatura kotrljajnog tela određena toplotnim modelom,  $r_k$ -poluprečnik kotrljajnog tela.



*Slika 5. Odnos pomeranja između centara zakriviljenosti staza kotrljanja pre i posle delovanja opterećenja*

U slučaju kada se unutrašnji prsten okreće, unutrašnja staza kotrljanja ima translatorno i rotaciono kretanje, a spoljašnja staza je stacionarna tokom obrtanja ležaja. Pod rotacionim kretanjem  $\theta_y$  i  $\theta_z$  i translatornim kretanjem x, y i z, pozicija vektora unutrašnje staze kotrljanja je definisana opštim koordinatnim sistemom sa vektorom pomeranja  $U = \{x, y, z, \theta_y, \theta_z\}^T$  i lokalnim koordinatnim sistemom u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela  $u_j = \{u_{rj}, u_{xj}, u_{\phi j}\}^T$  (slika 4). Predpostavljajući da u slučaju malih kretanja veza između  $\{u_j\}$  i  $\{U\}$ , uz razmatranje talasastosti staza kotrljanja, se definiše kao:

$$\{u_j\} = \{U\} [T_j] + \{\Delta P_j\} \quad (25)$$

gde je  $[T_j]$ -matrica transformacije u obliku:

$$\begin{bmatrix} T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_j & \sin \psi_j & 0 & -\sin \psi_j & \cos \psi_j \\ 0 & 0 & 1 & r_u \cos \psi_j & -r_u \sin \psi_j \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \psi_j & \cos \psi_j \end{bmatrix} \quad (26)$$

i  $\{\Delta P_j\}$  je relativni vektor talasastosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja [10]:

$$\Delta P_j = \begin{Bmatrix} P_{uj} - P_{sj} \\ q_{uj} - q_{sj} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

gde su  $P_{uj}$ ,  $P_{sj}$ ,  $q_{uj}$ ,  $q_{sj}$  (amplitude talasastosti za svaku poziciju kotrljajnog tela u aksijalnom i radikalnom pravcu definisane na osnovu sinusoidne funkcije kao:

$$\begin{aligned} p_{i,u/s} &= \frac{A \sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos \alpha_p} + p_{p,u/s} \sin(N_i \psi_i) \\ q_{i,u/s} &= \frac{A \sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos \alpha_p} + p_{p,u/s} \cos(N_i \psi_i) \end{aligned} \quad (28)$$

S obzirom da se unutrašnja ili spoljašnja staza obrću brzinom obrtanja obrtnog prstena, i centar kotrljajnih tela se obrće brzinom obrtanja kaveza, pozicija kotrljajnih tela se definiše kao:

$$\psi_i = \frac{2\pi}{Z}(i-1), \quad i=1,2,3,\dots,Z \quad (29)$$

Pozicija vektora centra zakrivljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja, odnosno rastojanje između dve pozicije vektora, se može razložiti na radikalni i aksijalni pravac. Postavljanjem relacija talasastosti iz relacije (29) u poziciju vektora centra radijusa zakrivljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja, rastojanje između dve pozicije vektora kod kugličnog ležaja sa kosim dodirom se određuje kao:

$$\begin{aligned} A_{1j} &= A \sin \alpha_p + x - \theta_z r_u \cos \psi_j + \theta_y R_u \sin \psi_j \\ &+ (q_{uj} - q_{sj}) + P_{uj} (\theta_z \cos \psi_j - \theta_y \sin \psi_j) \\ A_{2j} &= A \sin \alpha_p + y \cos \psi_j + z \sin \psi_j + (P_{uj} - P_{sj}) \\ &+ q_{uj} c_1 e (\theta_y \sin \psi_j - \theta_z \cos \psi_j) - \varepsilon_{sr} + \varepsilon_{ur} + u_{cent.} \end{aligned} \quad (30)$$

gde je  $e$  efektivni centar opterećenja, koji je definisan za kuglične ležaje sa kosim dodirom preko:  $e=2*r_u*c_2*tg(\alpha_0)$ , koeficijenti  $c_1$  i  $c_2$  zavise od načina rasporeda ležaja u jednom osloncu i određuju se kao :

$$c_1 = \begin{cases} -1 & za \quad i=1 \\ 1 & za \quad i=2 \end{cases} \quad (31)$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 & \text{za } O \text{ raspored} \\ -1 & \text{za } X \text{ raspored} \\ 0 & \text{za } T \text{ raspored} \end{cases} \quad (32)$$

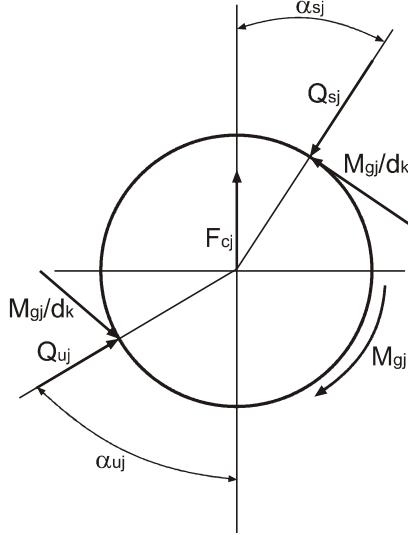
gde je  $i$ -broj ležaja u osloncu ili broj redova kuglica u ležaju, a  $u_{\text{cent}}$ -centrifugalno širenje unutrašnjeg ili spoljašnjeg prstena [10]:

$$u_{\text{cent.}} = \frac{\rho \omega^2 d_m}{32E} \left[ D_{u,s}^2 (3+\nu) + d_m^2 (1-\nu) \right] \quad (33)$$

U slučaju kada je spoljašnji prsten kugličnog ležaja obrtni, spoljašnja staza kotrljanja ima translatorna i obrtna kretanja oko osa, a unutrašnja staza kotrljanja je stacionarna tokom obrtanja ležaja. Slični izrazi se koriste za određivanje rastojanja između pozicije vektora centara zakriviljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja u ovom slučaju. Primenom Pitagorine teoreme, prema slici 5 za slučaj razmatranja uticaja preklopa/zazora, talasastosti staza kotrljanja i temperature na statičko ponašanje ležaja, dobijaju se sledeće jednačine pomeranja:

$$\begin{aligned} (A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 + (l_{uj} + \delta_{uj} \pm G_r - \varepsilon_k)^2 &= 0 \\ X_{1j}^2 + (X_{2j} - \varepsilon_{sr})^2 + (l_{sj} + \delta_{sj} \pm G_r - \varepsilon_k)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Na slici 6 je prikazano delovanje kontaktnih sila unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena, kao i delovanje centrifugalnih sila i giroskopskog momenta na kotrljajno telo.  $\lambda_{uj}$  i  $\lambda_{sj}$  su konstante određene teorijom kontrole staza kotrljanja [17].



Slika 6. Delovanje kontaktnih sila na kotrljajno telo

Jednačina ravnoteže sila na kotrljajno telo glasi:

$$\begin{aligned} Q_{sj} \cos \alpha_{sj} - Q_{uj} \cos \alpha_{uj} - \frac{M_{gj}}{d_k} (\lambda_{sj} \sin \alpha_{sj} - \lambda_{uj} \sin \alpha_{uj}) - F_{cj} &= 0 \\ Q_{sj} \sin \alpha_{sj} - Q_{uj} \sin \alpha_{uj} + \frac{M_{gj}}{d_k} (\lambda_{sj} \cos \alpha_{sj} - \lambda_{uj} \cos \alpha_{uj}) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$


---

Nelinearne jednačine pomeranja (34) i jednačine ravnoteže (35) su rešavane simultano koristeći Newton-Raphson-ov metod iteracije da bi se odredile nepoznate  $X_{1j}$ ,  $X_{2j}$ ,  $\delta_{uj}$  i  $\delta_{sj}$ . Sinus i kosinus ugla kontakta sa spoljašnjom, odnosno unutrašnjom stazom kotrljanja, se određuju prema slici 5:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{sj} &= \frac{X_{2j} - \varepsilon_{sr}}{l_{sj} + \delta_{sj} \pm G_r - \varepsilon_k} \\ \sin \alpha_{sj} &= \frac{X_{1j}}{l_{sj} + \delta_{sj} \pm G_r - \varepsilon_k} \\ \cos \alpha_{uj} &= \frac{A_{2j} - X_{2j} - \varepsilon_{sr}}{l_{uj} + \delta_{uj} \pm G_r - \varepsilon_k} \\ \sin \alpha_{uj} &= \frac{A_{1j} - X_{1j}}{l_{uj} + \delta_{uj} \pm G_r - \varepsilon_k}\end{aligned}\tag{36}$$

Centrifugalne sile i giroskopski momenti koji deluju na kotrljajno telo se mogu odrediti kao [17]:

$$\begin{aligned}F_{cj} &= \frac{1}{2} m d_m \omega^2 \left( \frac{\omega_E}{\omega} \right)_j^2 \\ M_{gj} &= J_k \omega^2 \left( \frac{\omega_k}{\omega} \right)_j \left( \frac{\omega_E}{\omega} \right)_j \sin \beta\end{aligned}\tag{37}$$

Vrednosti  $(\omega_E/\omega)_j$  i  $\operatorname{tg} \beta_j$  su date u tabeli T1 u zavisnosti od staze kotrljanja na kojoj se pretpostavlja da će doći do čistog kotrljanja (*raceway control*) [8], [17].

Tabela T.1. Odnos orbitalnih brzina i brzina obrtanja ležaja

Tip kontrole	Kontrola spolja. pretseна	Kontrola unutr. prstena
$\frac{\omega_E}{\omega}$	$\frac{1 - \lambda \cos \alpha_{uj}}{1 + \cos(\alpha_{uj} - \alpha_{sj})}$	$\frac{\cos(\alpha_{uj} - \alpha_{sj}) - \lambda \cos \alpha_{sj}}{1 + \cos(\alpha_{uj} - \alpha_{sj})}$
$\operatorname{tg} \beta_j$	$\frac{\sin \alpha_{sj}}{\cos \alpha_{sj} + \lambda}$	$\frac{\sin \alpha_{uj}}{\cos \alpha_{uj} - \lambda}$

Odnos između ugaonih brzina kotrljajnih tela i staze kotrljanja se određuje [17]:

$$\frac{\omega_B}{\omega} = \frac{\pm 1}{\left( \frac{\cos \alpha_{sj} + \operatorname{tg} \beta \sin \alpha_{sj}}{1 + \cos \alpha_{sj}} + \frac{\cos \alpha_{uj} + \operatorname{tg} \beta \sin \alpha_{uj}}{1 - \cos \alpha_{uj}} \right) \lambda \cos \beta}\tag{38}$$

U prethodnoj relaciji znak + se uzima u slučaju kada je spoljašnji prsten ležaja obrtni, a znak – u slučaju obrtanja unutrašnjeg prstena. Da li će doći do kotrljanja sa spoljašnjom ili unutrašnjom stazom zavisi od ispunjenosti uslova datih u tabeli T.2 [8].

Tabela T.2. Uslovi pri kojima dolazi do čistog kotrljanja

Spoljašnji prsten	$Q_{sj}a_{sj}E'_{sj} \cos(\alpha_{uj} - \alpha_{sj}) > Q_{uj}a_{uj}E'_{uj}$
Unutrašnji prsten	$Q_{uj}a_{uj}E'_{uj} \cos(\alpha_{uj} - \alpha_{sj}) > Q_{sj}a_{sj}E'_{sj}$

Pod drugim uslovima rada kotrljajno telo gubi kontakt sa unutrašnjim prstenom. Drugim rečima, spoljašnja staza proizodi silu rekacije na kotrljajna tela odnosno centripetalno ubrzanje. Kao rezultat toga spoljašnji ugao kontakta  $\alpha_{sj}$  i giroskopski moment postaju jednaki 0. Kontaktna sila sa spoljašnjim prstenom  $Q_{sj}$  je u tom slučaju, prema relacijama (9) i (35), jednaka centrifugalnoj sili  $F_{cj}$ , odnosno prema (9), deformacija sa spoljašnjom stazom je  $d_{sj} = (F_{cj}/K_s)^{2/3}$ . Da bi došlo do gubitka kontakta sa unutrašnjom stazom kotrljanja mora biti zadovoljen sledeći uslov [8]:

$$A_{1j}^2 + \left[ A_{2j} - (f_s - 0.5)d_k + K_s^{-2/3}F_{cj}^{2/3} \right]^2 \leq \left[ (f_u - 0.5)d_k \right]^2 \quad (39)$$

U cilju određivanja krutosti ležaja pod dejstvom kombinovanog opterećenja, prvo se mora odrediti veza između spoljašnjeg opterećenja, koje deluje na ležaj i pomeranja prstenova ležaja. Jednačine delovanja sila na unutranji i spoljašnji prsten ležaja su:

$$\begin{aligned} F_{xu,s} &= \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^Z \left( Q_{u,sj} \sin \alpha_{u,sj} + \frac{M_{gj}}{d_k} \cos \alpha_{u,sj} \right) \\ F_{yu,s} &= \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^Z \left( Q_{u,sj} \cos \alpha_{u,sj} + \frac{M_{gj}}{d_k} \sin \alpha_{u,sj} \right) \cos \psi_j \\ F_{zu,s} &= \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^Z \left( Q_{u,sj} \cos \alpha_{u,sj} + \frac{M_{gj}}{d_k} \sin \alpha_{u,sj} \right) \sin \psi_j \\ M_{yu,s} &= \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^Z \left\{ r_{u,s} \left( Q_{u,sj} \sin \alpha_{u,sj} + \frac{M_{gj}}{d_k} \cos \alpha_{u,sj} \right) - f_u M_{gj} \right\} \sin \psi_j \\ M_{zu,s} &= - \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^Z \left\{ r_{u,s} \left( Q_{u,sj} \sin \alpha_{u,sj} + \frac{M_{gj}}{d_k} \cos \alpha_{u,sj} \right) - f_u M_{gj} \right\} \cos \psi_j \end{aligned} \quad (40)$$

U prethodnim izrazima  $N$  je broj redova kuglica u ležaju ili broj ležaja u jednom osloncu. Sve ove sile su na kraju implicitno povezane sa relativnim pomeranjem prstenova ležaja preko:

$$\begin{aligned} x &= \delta_x^u - \delta_x^s; \quad \theta_y = \theta_y^u - \theta_y^s \\ y &= \delta_y^u - \delta_y^s; \quad \theta_z = \theta_z^u - \theta_z^s \\ z &= \delta_x^u - \delta_x^s \end{aligned} \quad (41)$$

Ako se relativna pomeranja ležaja označe sa  $\delta_k^m$ , gde je  $k=x, y, z$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  i  $m=u, s$ , onda se krutost ležaja može izraziti preko:

$$K_{u,k}^L = \frac{\partial F_k^u}{\partial \delta_k^u} = \left( -\sum_{j=1}^Z [T]_j^T \frac{\partial Q_j}{\partial u_j} [T]_j \right)_u \quad (42)$$

$$K_{s,k}^L = \frac{\partial F_k^s}{\partial \delta_k^s} = \left( -\sum_{j=1}^Z [T]_j^T \frac{\partial Q_j}{\partial u_j} [T]_j \right)_s$$

Ukupna krutost ležaja se na osnovu [10] dobija kao zbir krutosti unutrašnjeg i spojašnjeg prstena:

$$K^L = K_u + K_s \quad (43)$$

Na osnovu prethodnog, matrica krutosti ima oblik:

$$[K]^L = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\theta y} & k_{x\theta z} \\ k_{yy} & k_{yz} & k_{y\theta y} & k_{z\theta z} \\ s & k_{zz} & k_{z\theta y} & k_{z\theta z} \\ i & k_{\theta y\theta y} & k_{\theta y\theta z} \\ m. & k_{\theta z\theta z} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (44)$$

### 3.3 Teorijske osnove programskog rešenja za analizu toplotnog ponašanja

Toplotni uticaj na statičko i dinamičko ponašanje ležaja je značajan i ovaj uticaj se mora uzeti u obzir pri analizi ponašanja istih. Kada se broj obrtaja ležaja povećava, povećava se i razvijena toplota na kontaktnim površinama ležaja. S druge strane, promenljivi toplotni izvori i ponori prouzorkuju kompleksno toplotno širenje, koje stvara dodatna toplotna opterećenja. Toplotna opterećenja utiču na krutost ležaja i indirektno menjaju razvijenu toplotu na kontaktnim površinama ležaja. Toplotni model je tako definisan da predstavlja vezu između statičkog, dinamičkog i modela za određivanje veka ležaja.

Matematički model za analizu toplotnog ponašanja je proširen sa ciljem definisanja toplotnih polja kugličnih ležajeva, i njihovim implementiranjem u statički, dinamički i model za određivanje veka ležaja da bi se dobila što verodostojnija "slika" ponašanja kugličnih ležaja u eksplotaciji. Toplotni model je proširen u odnosu na dosadašnje modele uvođenjem novog modela za određivanje količine razvijene toplotne, prenošenja toplotne i statičkim modelom za određivanje kontaktnog opterećenja, uzimanjem u obzir širenja elemenata ležaja koja nastaju usled toplotnih dilatacija. Pored toga, ugaone brzine obrtanja elemenata ležaja, koje su potrebne za određivanje količine razvijene toplotne su određene na osnovu stvarnih vrednosti ugla kontakta, i njihove promene tokom eksploracije ležaja.

#### 3.3.1 Određivanje količine razvijene toplotne u ležaju

U ovom matematičkom modelu je količina razvijene toplotne definisana za svaku tačku kontakta između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, koristeći koncentrisano toplotno opterećenje, određeno preko statičkih kontaktnih opterećenja. Moment trenja kotrljanja za svako kotrljano telo ležaja na unutrašnjoj, odnosno spoljašnjoj stazi kotrljanja se sastoji iz momenta trenja usled podmazivanja i momenta trenja usled opterećenja i određuje se kao:

$$M_{u/s,j} = \left\{ 0.675 f_0 (\nu \omega_{kj})^{2/3} d_k^3 + f_i \left( \frac{Q_{u/s,j}}{Q_{u/s,max,j}} \right)^{1/3} Q_{u/s,j} d \right\} \quad (45)$$


---

gde su:  $f_0$ - koeficijent zavisan od tipa ležišta i tipa sredstava za podmazivanje (za ležišta sa kosim dodirom i podmazivanje mašću ova vrednost se kreće od 2-4), s tim da prema preporukama proizvođača veće vrednosti treba uzimati za ležaje sa čeličnim kuglicama, a manje vrednosti za ležaje sa keramičkim kuglicama zbog manjeg koeficijenta trenja;  $v$ - kinematska viskoznost sredstva za podmazivanje [ $\text{mm}^2/\text{s}$ ]

Ugaona brzina kotrljanja kotrljajnih tela  $\omega_k$  je određena na osnovu srednjeg prečnika ležaja, prečnika kotrljajnih tela, ugla kontakta i ugaone brzine obrtanja kaveza:

$$\begin{aligned}\omega_{kj} &= \omega_c \frac{d_k / d_m + \cos(\alpha_s)}{\cos(\alpha_s) \cos \beta + \sin(\alpha_s) \sin \beta} \\ \omega_c &= \Omega \left[ 1 + \frac{(d_k / d_m + \cos(\alpha_s))(\cos \alpha_u \cos \beta + \sin \alpha_u \sin \beta)}{(d_k / d_m - \cos(\alpha_u))(\cos \alpha_s \cos \beta + \sin \alpha_s \sin \beta)} \right]^{-1}\end{aligned}\quad (46)$$

Druga komponenta koja utiče na stvaranje toplote na ležaju je moment klizanja, koji je za svaki kontakt sa unutrašnjom i spoljašnjom stazom kotrljanja određen na osnovu [8], [42]:

$$M_{Su/s,j} = \frac{3\mu Q_{u/s,j} \sqrt[3]{6\kappa_{u/s}^2 R_{xy,u/s} Q_{u/s} / \pi E''}}{8} E'_{u/s,j} \quad (47)$$

Za svako kotrljajno telo razvijena toplota u zoni kontakta sa unutrašnjom, odnosno spoljašnjom stazom kotrljanja se dobija iz:

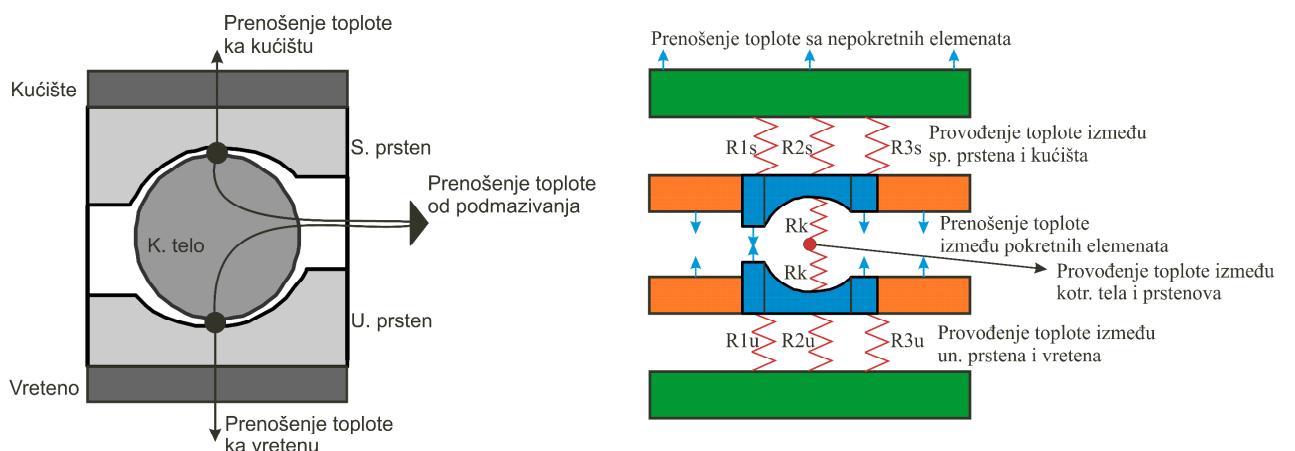
$$H_{u/s,j} = \omega_{kj} M_{u/s,j} + \omega_{sp,u/s} M_{Su/s,j} \quad (48)$$

U prethodnoj relaciji  $\omega_{sp}$  je ugaona brzina klizanja sa spoljašnjim, odnosno unutrašnjim pretenjem i dobija se iz relacije [17]:

$$\omega_{sp,s/u} = \Omega \left[ -(1 + \lambda \cos \alpha_{s/u}) \operatorname{tg}(\alpha_{s/u} - \beta) + \lambda \sin(\alpha_{s/u}) \right]^{-1} \quad (49)$$

### 3.3.2 Mehanizmi prostiranja toplote kroz ležaj

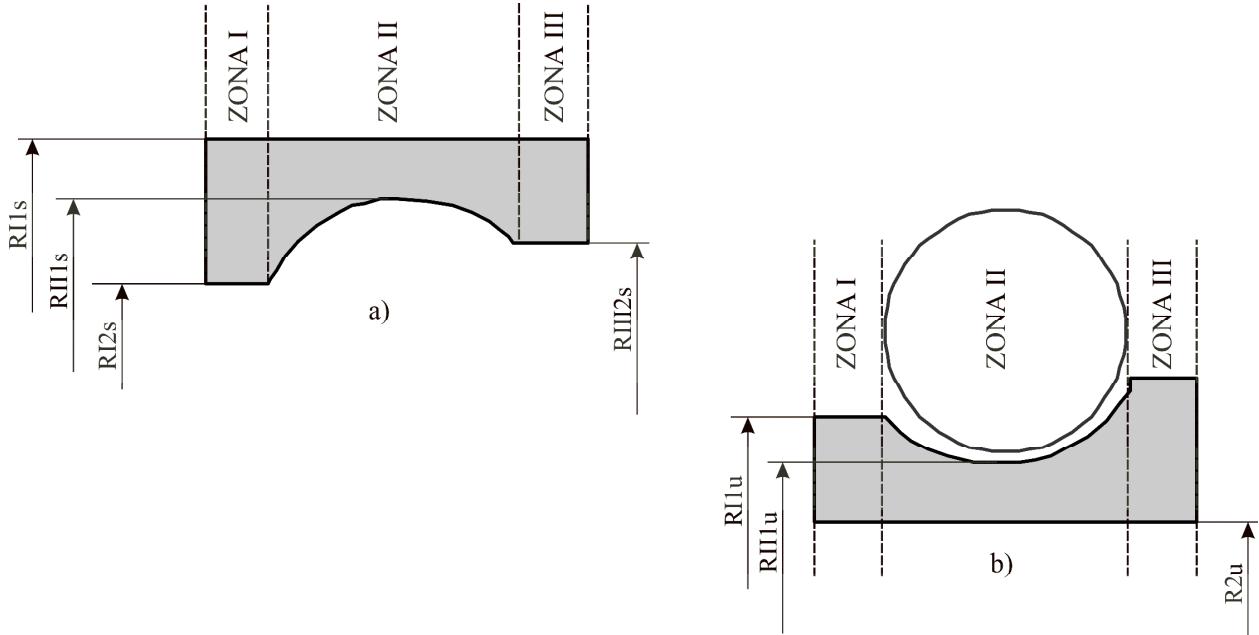
Glavni unutrašnji mehanizmi prenosa toplote u razvijenom programskom rešenju su: prenošenje toplote između obrtnih elemenata ležaja, prenošenje toplote sa stacionarnih elemenata ležaja i provođenje između kontaktnih elemenata ležaja (slika 7).



Slika 7. Mehanizmi prenosa toplote

Unutrašnja geometrija ležaja je složenog oblika, a koeficijenti prenosa i provođenja toplote u velikoj meri zavise od unutrašnje geometrije ležaja. Usled toga su pri definisanju matematičkog modela za prenosa i provođenje toplote kroz ležaj, elementi ležaja podeljeni u

tri karakteristične zone koji definišu dimenzije ležaja. (slika 8). U prvoj zoni se vrši provođenje toplote između spoljašnjeg prstena i kućišta ležaja na poluprečniku  $R_{I1s}$  i  $R_{II1s}$ , i provođenje toplote između unutrašnjeg prstena i vretena na poluprečnicima  $R_{II1u}$  i  $R_{III1u}$ . Takođe se i u zonama II i III vrše i provođenja toplote između spoljašnjeg prstena i kućišta i unutrašnjeg prstena i vretena ali na poluprečnicima karakterističnim za tu zonu. kao što je prikazano na slici 8a i b. U zoni II se odvija i provođenje toplote između kotrljajnih tela i prstenova. Usled obrtanja unutrašnjeg prstena dolazi do prenošenja toplote sa unutrašnjeg na nepokretni spoljašnji prsten u zonama I i III.



Slika 8. Šematski model prenosa toplote kod kugličnih ležaja

### 3.3.2.1 Prenošenje toplote usled obrtanja elemenata ležaja

Koeficijent prenosa toplote je u opštem slučaju definisan prema [8]:

$$h = \frac{N_u k_{fluida}}{D_\lambda} \quad (50)$$

gde su:  $k_{fluida}$  je topotna provodljivost vazduha u slučaju prenošenja toplote između elemenata ležaja,  $N_u$  je Nusselt-ov broj i  $D_\lambda$  je prečnik sa kojeg se odvodi toplota.

#### Prenošenje toplote između staza kotrljanja

U ovom slučaju dolazi do razmene toplote između staza kotrljanja i okolnog vazduha usled obrtanja unutrašnje ili spoljašnje staze kotrljanja. Koeficijent prenosa toplote se određuje prema relaciji (51), s tim da je u ovom slučaju  $D_\lambda$  rastojanje između staza kotrljanja u zavisnosti od zone koja se posmatra (sl.8) i određuje se:

$$D_\lambda = \frac{R_{i2s} - R_{ilu}}{2} \quad i=I,II,III,\dots,n \quad (51)$$

Nusselt-ov broj je određen prema [8]:

$$N_u = 0.0225 R_e^{0.8} P_r^{0.9} \quad (52)$$

Rejnoldsov broj  $Re$  se u ovom slučaju definiše prema [4]:

$$R_e = \frac{uD_\lambda}{\nu_{fluida}} \quad (53)$$

Rezultujuća brzina strujanja vazduha  $u$  pri obrtanju ležaja se prema [4], može odrediti kao kružni protok između dva cilindra sa velikim zazorom između njih.

$$u = \frac{1}{\left(1 - \left(R_{i2s}/R_{i2u}\right)^2\right)} \left\{ \left[ -\omega_{u/s} \left( \frac{R_{i2s}}{R_{i2u}} \right)^2 \right] dm/2 + \frac{2R^2_{i2s}}{d_m} \omega_{u/s} \right\} \quad (54)$$

ovde je  $u$  linearna brzina strujanja vazduha između prstenova ležaja na srednjem prečniku ležaja  $d_m$ .

#### Prenošenje toplote sa kotrljajnih tela

Pri obrtanju kotrljajnih tela dolazi do razmene topline, sa sredstvom za podmazivanje, čiji deo se prenosi na ostale elemente ležaja, a deo se odvodi u vazduh. Nusselt-ov broj je definisan kao :

$$N_{u,kt} = 0.43 \sqrt{R_{e,kt}} P_r^{0.4} \quad (55)$$

Rejnoldsov broj je određen na bazi prečnika kotrljajnih tela i njegove ugaone brzine prema:

$$R_{e,kt} = \omega_c \frac{d_k^2}{\nu} \frac{d_k/d_m + \cos(\alpha_s)}{\cos(\alpha_s) \cos \beta + \sin(\alpha_s) \sin \beta} \quad (56)$$

Koefficijent porenošenja topline sa kotrljajnih tela se određuje na osnovu njegovog prečnika kao:

$$h_{kt} = \frac{N_{u,kt} k_{fluida}}{d_k} \quad (57)$$

gde je  $k_{fluida}$ - je topotna provodljivost sredstva za podmazivanje,  $\nu$ -kinematska viskoznost sredstva za podmazivanje.

#### **3.3.2.2 Provodenje topline između elemenata ležaja**

Porast temperature na spoljašnjem ili unutrašnjem prstenu ležaja u velikoj meri zavisi od provodljivosti na mestu kontakta, odnosno od toplotne otpornosti samog kontakta. Toplotna otpornost kontakta zavisi od oblika i veličina dodirnih površina i prema tome je povezana sa geometrijom ležaja i unutrašnjim kontaktnim pritiscima u ležaju. U ovom radu je toplotni model proširen određivanjem momenta trenja, količine razvijene topline, kontaktne provodljivosti, i prenošenja topline sa kotrljajnih tela, za svaku poziciju kotrljajnog tela.

#### Provodenje topline između kotrljajnih tela i prstenova

Provodenje topline između kotrljajnih tela i prstenova je određeno na osnovu površine kontakta, koji zavisi od radiusa zakrivljenosti staza kotrljanja, opterećenja ležaja i materijala

kotrljajnih tela i staza kotrljanja u statičkom modelu i toplotne otpornosti kontakta. Toplotna otpornost za svako kotrljajno telo na mestu kontakta sa stazama kotrljanja se određuje [33]:

$$R_{to} = \frac{d_k}{kA_{u/s}} \quad (58)$$

gde je:  $k$  -toplotna provodljivost materijala, a  $A_{u/s} = a_{u/s}b_{u/s}\pi$  je površina kontakta sa spoljašnjom i unutrašnjom stazom kotrljanja određena u programskom rešenju za analizu statičkog ponašanja.

#### Provodenje toplote između prstenova i kućišta/vratila/rukavca

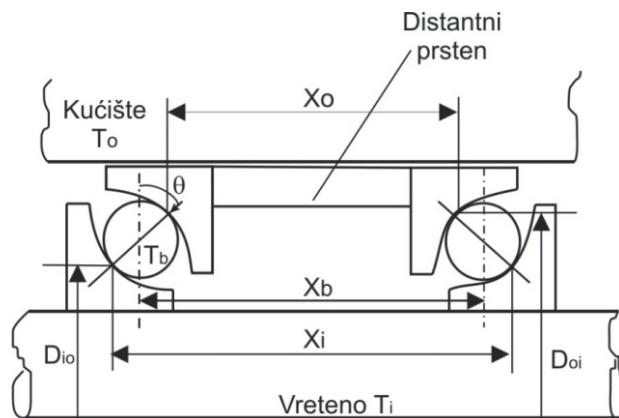
Provodenje toplote između prstenova i kućišta-vratila/rukavca u velikoj meri zavisi od zazora/preklopa između spoljašnjeg prstena i kućišta, odnosno unutrašnjeg prstena i rukavca preko toplotne otpornosti kontakta. Toplotna otpornost između pomenućih elemenata se određuje preko otpornosti dva cilindra sa malim zazorom između njih kao [30]:

$$\begin{aligned} R_{to,u}^c &= \frac{\ln(R_{2u}/R_{1lu})}{2\pi L_z} \\ R_{to,s}^c &= \frac{\ln(R_{i2s}/R_{i1s})}{2\pi L_z} \end{aligned} \quad (59)$$

U prethodnoj relaciji  $R_{to,u}^c$  i  $R_{to,s}^c$  su toplotne otpornosti kontakta unutrašnjeg prstena sa rukavcem, odnosno spoljašnjeg sa kućištem;  $R_{2u}$  je poluprečnik unutrašnjeg prstena ležaja i prema slici 8 isti je za svaku razmatranu zonu;  $L_z$  je širina razmatrane zone.

#### **3.3.3 Određivanje toplotnog prednaprezanja**

Na osnovu temperaturnih polja dobijenih analizom u programskom sistemu opšte namene i eksperimentalnim ispitivanjima definisan je i matematički model za određivanje porasta prednaprezanja usled toplotnih širenja elemenata ležaja. Na slici 9 su prikazane veličine potrebne za određivanje toplotnog prednaprezanja kod ležaja sa kosim dodirom. Početne temperature spoljašnjeg prstena ili kućišta, unutrašnjeg prstena/rukavca i kotrljanih tela su:  $T_o^0$ ,  $T_i^0$ ,  $T_k^0$  respektivno. Kada dođe do porasta temperature usled razvijene topline na ležajima, prstenovi, kotrljana tela i rukavca se šire u aksijalnom i radikalnom pravcu, što rezultira toplotnim prednaprezanjem.



Slika 9. Potrebni parametri za određivanje toplotnog prednaprezanja

Usled toplotnog zagrevanja dolazi do aksijalnog širenja spoljašnjeg i unutrašnjeg prstena. Razlika aksijalnog toplotnog širenja prstenova ( $\Delta_a$ ) se određuje na osnovu koeficijenta toplotnog širenja materijala prstenova ( $\alpha_T$ ), rastojanja između kontaktnih tačaka na spoljašnjem i unutrašnjem prstenu ( $x_0$ ,  $x_i$ ) i razlike temperatura na prstenovima (sl.9) [11]:

$$\Delta_a = \alpha_T \left[ x_i (T_i^1(t) + T_i^0(t)) - x_o (T_o^1(t) + T_o^0(t)) \right] \quad (60)$$

gde su:  $T_i^1(t)$  i  $T_o^1(t)$  – temperature na unutrašnjem i spoljašnjem prstenu nakon određenog vremenskog intervala. Veza između rastojanja  $x_i$ ,  $x_o$  i centra kotrljanih tela  $x_b$  je određena relacijom:

$$x_i = x_b + \frac{1}{2} D_b \sin \alpha_u \quad (61)$$

$$x_o = x_b - \frac{1}{2} D_b \sin \alpha_s \quad (62)$$

Širenje unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena u radijalnom pravcu ( $\Delta_r$ ) se određuje na osnovu povećanja prečnika prstenova usled toplotnog širenja u radijalnom pravcu:

$$\Delta_r = \frac{1}{2} \alpha_r \left[ d_u (T_i^1(t) - T_i^0(t)) - d_s (T_o^1(t) - T_o^0(t)) \right] \quad (63)$$

Toplotno širenje kotrljajnih tela ( $\Delta_k$ ) je definisano sledećom relacijom:

$$\Delta_k = \alpha_{Tk} d_k (T_b^1(t) - T_b^0(t)) \quad (64)$$

gde je:  $T_b^1(t)$  – temperatura kotrljajnog tela nakon određenog vremenskog intervala,  $\alpha_{Tk}$  – koeficijent toplotnog širenja materijala prstenova i kotrljajnog tela.

Ukupno pomeranje prstenova ležaja u pravcu linije kontakta se dobija iz sledeće relacije:

$$\Delta = \Delta_a + \Delta_r \cos \alpha - \Delta_k \sin \alpha \quad (65)$$

Aksijalno prednaprezanje prouzrokovano toplotnim opterećenjem se dobija iz relacije:

$$P_{a,t} = K_x \Delta \quad (66)$$

gde je  $K_x$  aksijalna krutost ležaja određena relacijom (22).

### 3.4 Teorijske osnove programskog rešenja za analizu dinamičkog ponašanja

Matematički model za nelinearnu analizu dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja usled talasastosti staza kotrljanja, zazora/preklopa i temperatura je razvijen primenom Langražovih jednačina za sistem nezavisnih generalizovanih koordinata. Prvo su određene kinetičke i potencijalne energije za sve elemente ležaja, nakon čega su ove energije korišćenjem Langražovih jednačina implementirane u jednačine kretanja koje opisuju dinamički model ležaja. Elementi ležaja su definisani kao sistem elastično povezanih masa, kod koga je spoljašnji ili unutrašnji prsten stacionaran, što je ispravno, ako se uzme da je spoljašnji ili unutrašnji prsten

kruto vezan u osloncu. U opštem slučaju je vrlo teško i komplikovano postaviti realan model za analizu dinamičkog ponašanja ležaja, pa se moraju uvesti određene pretpostavke:

1. Deformacije između kotrljajnih tela i prstenova se nalaze u zoni elastičnosti prema Hertz-ovoj teoriji. Prema tome, razmatraju se samo mala elastična pomeranja kotrljajnih tela i prstenova.
2. Trenje klizanja kotrljajnih tela je zanemarljivo.
3. Prigušenje u ležaju je zanemarljivo malo i javlja se isključivo zbog sila trenja i maziva.
4. Kavez obezbeđuje konstantno ugaono rastojanje između kotrljajnih tela.

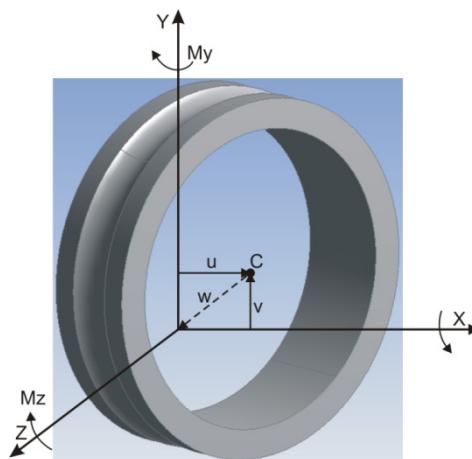
Dinamičko ponašanje kugličnih ležaja je definisano Langaržovom jednačinom kretanja za sistem nezavisnih kooordinata koja glasi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \{\dot{p}\}} - \frac{\partial T}{\partial \{p\}} + \frac{\partial V}{\partial \{p\}} = \{Q\} \quad (67)$$

gde su: T, V, p i Q kinetička i potencijalna energija, vektor generalizovanih kooordinata i vektor generalizovanih kontaktnih sila respektivno. Kinetička i potencijalna energija se mogu razdvojiti za svaki element ležaja. Ukupna kinetička energija ležaja jednaka je zbiru kinetičkih energija unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena i kotrljajnih tela. Potencijala enrgija je delom prouzorkovana deformacijama između kotrljajnih tela i staza kotrljanja u skladu sa *Hertz*-ovom kontaktnom teorijom elastičnosti. Ukupna potencijalna energija koja se javlja u ležaju je zbir potencijalnih energija kotrljajnih tela, spoljašnje i unutrašnje staze kotrljanja i deformacija koje se javljaju između njih

### 3.4.1 Kinetička energija unutrašnje staze kotrljanja

Pošto se u zoni kontakta između kotrljajnih tela i staza kotrljanja javljaju isključivo lokalne deformacije, unutrašnji prsten ležaja se može smatrati kao kruto telo. Pozicija i orijentacija unutrašnjeg prstena je opisana u smeru kazaljke na satu u Dekartovom koordinatnom sistemu i definisana je x, y i z osom. Pomeranje centra unutrašnjeg prstena je definisano sa tri translatorna stepena slobode  $u, v$  i  $w$  i dva rotaciona stepena slobode, rotacijom oko y ose ( $-\theta_y$ ) i rotacijom oko z ose ( $\theta_z$ ) kao što je prikazano na slici 10.



Slika 10. Šematski prikaz koordinatnog sistema sa stepenima slobode za unutrašnji prsten

Ugao zaokretanja oko  $x$  ose je mali i njegova ugaona brzina je konstantna pa se može zanemariti. Dakle, pomeranje centra ležaja u nepokretnom  $x$ ,  $y$  i  $z$  koordinatnom sistemu usled rotacije  $\theta_y$  i  $\theta_z$  se može napisati kao [8]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [T] \begin{Bmatrix} 0 \\ r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Pomeranje centra ležaja po kooordinatama  $u$ ,  $v$  i  $w$ ,  $\theta_y$  i  $\theta_z$  je:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 + u - r \cos \psi \sin \theta_z + r \sin \psi \sin \theta_y \\ v + r \cos \psi \cos \theta_z \\ w + r \sin \psi \cos \theta_y \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Unutrašnji prsten ležaja je relativno krut prsten, pa su ugaona pomeranja mala. Pod predpostavkom da je  $\cos \theta_y \approx 1$ ,  $\cos \theta_z \approx 1$ ,  $\cos \theta_x \approx 1$ ,  $\sin \theta_y \approx 1$  i  $\cos \theta_x \approx 1$  za mala pomeranja, brzina centra ležaja je:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + \Omega r \theta_z \sin \psi + \Omega r \theta_y \cos \psi - r \dot{\theta}_z \cos \psi + r \dot{\theta}_y \sin \psi \\ \dot{v} - \Omega r \sin \psi - r \theta_z \dot{\theta}_z \cos \psi \\ \dot{w} + \Omega r \cos \psi - r \theta_y \dot{\theta}_y \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Kinetička energija centra mase unutrašnjeg prstena je [8]:

$$T = \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho r (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dr d\psi \quad (71)$$

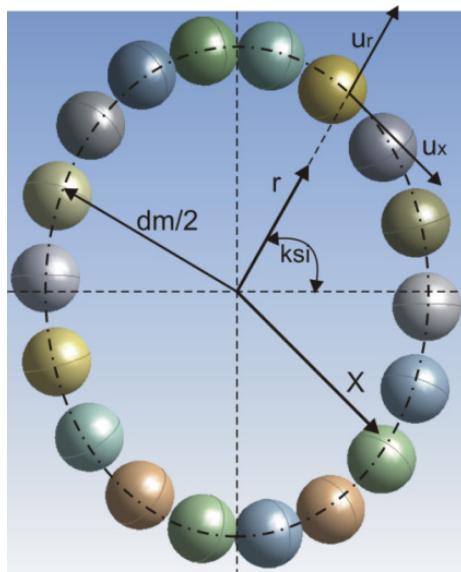
gde su  $a$  i  $b$  poluprečnik otvora ležaja i poluprečnik staze kotrljanja respektivno. Zamenom relacije (70) u (71), se može definisati kao [8]:

$$T_{us} = \frac{1}{2} J_p \Omega^2 + \frac{1}{2} m_{us} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_p (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} \Omega J_p (\dot{\theta}_y \theta_z - \theta_y \dot{\theta}_z) \quad (72)$$

gde su  $I_p = (1/4)m_{up}[(d_{us}/2)^2 - (d/2)^2]$  je moment inercije oko  $y$  ili  $z$  ose,  $J_p = (m_{up}/2) m_{up}[(d_{us}/2)^2 - (d/2)^2]$  je polarni moment inercije oko  $x$  ose, i  $m_{up}$  je masa unutrašnjeg prstena.

### 3.4.2 Kinetička energija kotrljajnih tela

Kotrljajna tela vrše složeno kretanje: obrtanje sa kavezom oko ose kaveza i obrtanje oko sopstvene ose koja se zajedno sa kavezom obrće oko ose kaveza. Za određivanje kinetičke energije, pozicija  $j$ -tog kotrljajnog tela se mora definisati preko dva translatorna stepena slobode  $u_{rj}$  i  $u_{xj}$  i jednog rotacionog  $\omega_j$  (slika 10). Translatorni stepeni slobode su definisani u cilindričnom koordinatnom sistemu, koji se poklapa sa koordinatnim sistemom za unutrašnji prsten (slika 11). Kao referentni stepen slobode je uzet  $r_j$  na srednjem prečniku kotrljajnih tela  $d_m$ . Tangencijalna koordinata je poznata, jer se kotrljajna tela obrću ugaonom brzinom kaveza oko centralne ose ležaja. Ovo proizilazi iz predpostavke da se kotrljajna tela nalaze na jednakom rastojanju u kavezu.



Slika 11. Šematski prikaz koordinatnog sistema sa stepenima slobode za kotrljajna tela

Raspored opterećenja na kotrljajna tela se menja tokom vremena, što izaziva i promenu ugla kontakta sa vremenom. Prema tome, promenom ugla kontakta između staza kotrljanja doći će i do male promene ugaone brzine kaveza. U literaturi se često ugaona brzina kaveza smatra konstantna. Tangencijalna kooordinata j-tog kotrljajnog tela je određena kao:

$$\psi_i = \frac{2\pi}{Z}(i-1) + \omega_c t, \quad i=1,2,3,\dots,Z \quad (73)$$

gde je  $t$  vreme za koje kotrljajana tela naprave jedan pun krug. Ako se predpostavi da sva kotrljajana tela imaju istu masu, kinetička energija usled kretanja kotrljajnih tela se dobija kao zbir pojedinačnih kinetičkih energija od  $Z$  kotrljajnih tela kao [49]:

$$T_{kt} = \sum_{j=1}^Z T_j \quad (74)$$

odnosno, kinetička energija j-tog kotrljajnog tela je:

$$T_j = \frac{1}{2} m_{kt} \left( \dot{u}_\eta^2 + \dot{u}_x^2 + (dm/2 + r_j)^2 \omega_c^2 \right) \quad (75)$$

gde je  $m_{kt}$  –masa kotrljajnog tela. Poslednji član sa desne strane relacije (75) uzima u obzir centrifugalnu silu koja deluje na kotrljajna tela.

### 3.4.3 Potencijalna energija usled kontaktnih deformacija

Kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja je nelinearan i njegova krutost se dobija na osnovu Hertz-ove teorije kontakta kao što je prikazano pri definisanju statičkog modela. Intenzitet elastičnih kontaktnih sila je vremenski zavisan od položaja kotrljajnih tela na stazama kotrljanja. Uopšteno gledano, vremenska promenljivost intenziteta kontaktnih sila prouzorkovaće vibracije i kod idealnog ležaja. Potencijalna energija koja nastaje usled ovih deformacija, jednaka je radu koji sila ostvari na odgovarajućim pomeranjima. Prema tome,

potencijalna energija nastala usled dejstva elastičnih kontaktnih deformacija za pojedinačno kotrljajno telo će biti [49]:

$$V_{kd(j)} = \int Q_j d\delta_j = \int K_{u,s} \sqrt{\delta_{u,s}^3} d\delta_{u,s} = \frac{2}{5} K_{u,s} \delta_{u,s}^{5/2} \quad (76)$$

Ukupna potencijalna energija usled nelinearnih kontaktnih deformacija dobija se kao zbir pojedinačnih energija kotrljajnih tela ležaja:

$$V_{kdef.} = \sum_{i=1}^{Z-1} V_{kd(j)} \quad (77)$$

Kontaktne deformacije između j-tog kotrljajnog tela i unutrašnje/spoljašnje staze kotrljanja, uzimajući u obzir talasastost staze kotrljanja, zazor ili preklop i toplotne dilatacije prema relaciji su:

$$\delta_{uj} = \sqrt{(A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - (X_{2j} - \varepsilon_{sr}))^2} - (l_{uj} \pm G - \varepsilon_k) \quad (78)$$

$$\delta_{sj} = \sqrt{(X_{1j})^2 + (X_{2j} - \varepsilon_k)^2} - (l_{sj} - \varepsilon_k \pm G_r) \quad (79)$$

gde su:  $A_{1j}$ ,  $A_{2j}$ ,  $X_{1j}$ ,  $X_{2j}$ ,  $l_{uj}$ ,  $l_{sj}$  geometrijski parametri određeni relacijama (23) i (30), prema slici 5,  $\varepsilon_k$  – toplotno širenje kotrljajnog tela dato relacijom (24). Ako je izraz ispod korena veći od nule kontaktne sile deluju na prstenove ležaja, u obrnutom slučaju nema dejstva kontaktnih sila na prstenove ležaja.

### 3.4.5 Jednačine kretanja

Ako se zanemari prigušenje u ležaju, posmatrajući samo dijagonalne članove matrice (45) uz pretpostavku da je vratilo male debljine (masa vratila se zanemaruje), jednačina kretanja unutrašnjeg prstena u skladu sa koordinatnim sistemom na slici 4 glasi:

$$[m]\{\ddot{p}\} + [k]\{p\} + \sum_{j=1}^Z Q_u \frac{\partial \delta_j^u}{\partial p} = \{F\} \quad (80)$$

gde je: m- matrica masa, k- matrica krutosti, p-vektor generalizovanih koordinata i F – vektor spoljašnjeg opterećenja u obliku:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{up} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{up} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix}; [k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta_x \theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z \theta_z} \end{bmatrix}; \{p\} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_x \\ \theta_z \end{bmatrix}; \{F\} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (81)$$

## 3.5 Teorijske osnove programskog rešenja za određivanje veka kugličnih ležaja

Maksimalno kontaktno opterećenje na stazama kotrljanja utiče na smanjanje veka ležaja. U skladu sa Ludenberg-Palmgren-ovom teorijom vek ležaja se može odrediti kao:

$$L_v = \left( \frac{C}{Q_e} \right)^3 \cdot 10^6 [\text{obrtaja}] \quad (82)$$

gde su C-dinamička nosivost ležaja, a Q<sub>e</sub> ekvivalentno kontaktno opterećenje. Dinamička nosivost ležaja značajno zavisi od dimenzija staza kotrljanja i ugla kontakta ležaja, odnosno od sile prednaprezanja i spoljašnjeg opterećenja. Ugao kontakta ležaja se menja tokom eksploatacije usled obrtanja kotljanih tela i opterećenja. Iz ovih razloga za što tačnije određivanje veka ležaja potrebno je dinamičku nosivost odrediti preko relacije [2]:

$$C = i^{0.7} (C_{\mu}^{-3,33} + C_{\nu}^{-3,33})^{-0.3} \quad (83)$$

pri čemu je C<sub>μ</sub>- dinamička nosivost unutrašnjeg prstena i određuje se iz [16]:

$$C_{\mu} = 98,1 \left( \frac{2R_u}{d_k} \cdot \frac{r_u}{r_u - R_u} \right)^{0.41} \cdot \frac{(1 - \gamma_u)^{1,39}}{(1 + \gamma_u)^{1/3}} \cdot \left( \frac{\gamma_u}{\cos \alpha_u} \right)^{0,3} \cdot Z^{-1/3} \cdot d_k^{1,8} \quad (84)$$

dok je C<sub>ν</sub>- dinamička nosivost spoljašnjeg prstena i određuje se iz [16]

$$C_{\nu} = 98,1 \left( \frac{2R_s}{d_k} \cdot \frac{r_s}{r_s - R_s} \right)^{0.41} \cdot \frac{(1 - \gamma_s)^{1,39}}{(1 + \gamma_s)^{1/3}} \cdot \left( \frac{\gamma_s}{\cos \alpha_s} \right)^{0,3} \cdot Z^{-1/3} \cdot d_k^{1,8} \quad (85)$$

gde su: R-odgovarajući poluprečnik staze kotrljanja, r- radijusi staze kotrljanja; i - broj redova kotljanih tela. Kontaktno opterećenje koje deluje na unutrašnju odnosno spoljašnju stazu kotrljanja, dobija se kao zbir konatknih opterećenja za svako kotrljajano telo [52]:

$$Q_{u/s} = \left[ \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^Z Q_{u/s,j}^3 \right]^{1/3} \quad (86)$$

Na osnovu prethodnog vek, svake staze kotrljanja se određuje kao [16]:

$$L_{u/s} = \left( \frac{C_{\mu u/s}}{Q_{u/s}} \right)^3 \quad (87)$$

odnosno, ukupni vek ležaja će biti:

$$L_{uku.} = \left[ L_u^{-1,11} + L_s^{-1,11} \right]^{-0,9} \cdot 10^6 [\text{obrtaja}] \quad (88)$$

## 4.0 OPIS PROGRAMSKIH REŠENJA ZA ANALIZU PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA

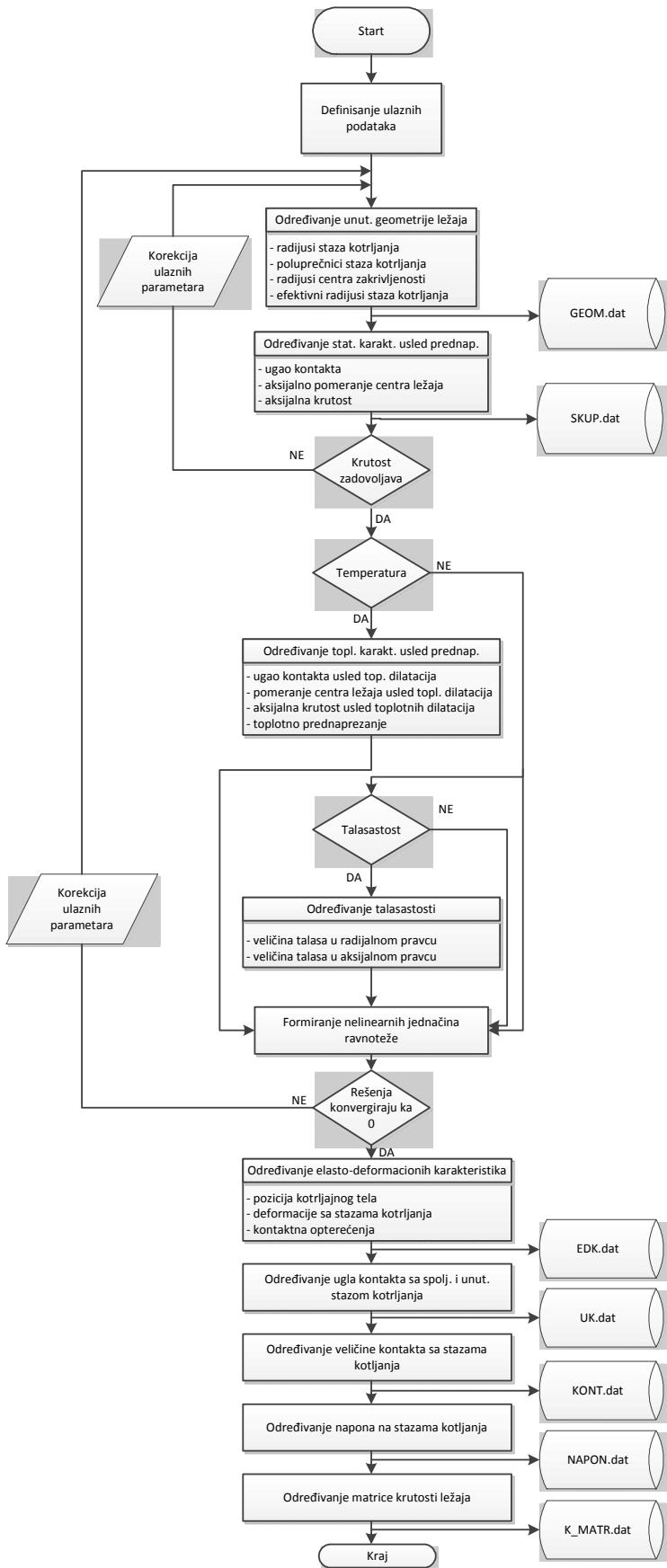
### 4.1 Programsко rešenje za analizu statičkog ponašanja

Prema izloženoj metodologiji u prethodnom delu, postavljena je koncepcija i razvijeno je programsko rešenje za analizu statičkog ponašanja. Model ovog programskega rešenja je prikazan na slici 12. Procedura proračuna kugličnih ležaja se odvija u više koraka. Prvi korak predstavlja definisanje ulaznih podataka zadavanjem, kako geometrijskih parametara ležaja (prečnici ležaja, nominalni ugao kontakta, prečnik i broj kotrljajnih tela, radijusi staza kotrljanja itd.) , tako i mehaničkih osobina materijala i spoljašnjeg opterećenja. Imajući u vidu mogućnost izrade elemenata ležaja i od drugih materijala osim čelika, program omogućava zadavanje odgovarajući karakteristika ( $E$ ,  $v$ ) za svaki element ležaja. Ukoliko unutrašnja geometrija ležaja nije poznata, u programskom rešenju je ostavljena mogućnost određivanja iste. U drugoj fazi se na osnovu ulaznih podataka preko relacija (1) i (2) određuju radijusi zakrivljenosti staza kotrljanja, dok se efektivni radijusi definišu preko relacije (3). Nakon ovoga se u istoj fazi pomoću relacije (10) određuje Hertz-ove normalne kontaktne krutosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja. Kao izlaz iz druge faze se formira datoteka GEOM.dat koja pored ulaznih podataka sadrži i izračunate vrednosti radijusa zakrivljenosti, efektivne radijuse i Hertz-ove normalne kontaktne krutosti.

U trećoj fazi se na osnovu prethodnih podataka i poznate sile prednaprezanja određuje ugao kontakta sa stazama kotrljanja, preko relacije (19) iterativnim postupkom za zadati početni uslov. Pomeranje centra i aksijalna krutost ležaja se dobijaju pomoću relacija (20) i (22). Na kraju ove faze se formira datoteka SKUP.dat koja sadrži pomenute izračunate parametre. Ako početna krutost ležaja zadovoljava u četvrtoj fazi se u programu može razmatrati uticaj geometrijskih nesavršenosti (talasastosti) i temperature na njegovo statičko ponašanje. Ukoliko se razmatra uticaj temperature onda se na osnovu relacije (65) određuje pomeranje centra ležaja usled toplotnih dilatacija, dok se relacijom (66) izračunava povećanje prednaprezanja usled toplotnog opterećenja.

U četvrtoj fazi se na osnovu nelinearnih jednačina ravnoteže (34), (35) određuju kontaktna opterećenja i deformacije sa stazama kotrljanja za svaku poziciju kotrljajnog tela, prema relaciji (29), uz uslove date u tabeli T.2 i relacijom (39). Ukoliko su pomenuti uslovi ispunjeni u narednom koraku se vrši određivanje ugla kontakta sa spoljašnjom, odnosno unutrašnjom stazom kotrljanja i pomeranje centra ležaja u  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta_y$  i  $\theta_z$ -pravcu. Nelinearne jednačine ravnoteže (34), (35) i (40) se rešavaju *Newton-Raphson-ovim* postupkom. Takođe u ovoj fazi se određuju i veličine kontakta sa stazama kotrljanja za svako kotrljajno telo i naponi na stazama kotrljanja. Na kraju ove faze pomoću relacije (42) se određuje ukupna matrica krutosti za ležaj. Kao krajnji izlaz iz programskog rešenja formira se datoteka REZULTAT.dat koju sačinjavaju rezultati: deformacije staza kotrljanja ( $\delta_u$ ,  $\delta_s$ ), kontaktne opterećenja na stazama kotrljanja ( $Q_u$ ,  $Q_s$ ), ugao kontakta sa stazam kotrljanja ( $\alpha_u$ ,  $\alpha_s$ ), veličine osa elipsoidnih kontaktnih površina ( $a_u$ ,  $b_u$ ,  $a_s$ ,  $b_s$ ), naponi na stazama kotrljanja ( $\Sigma_u$ ,  $\Sigma_s$ ) i matrica krutosti ležaja.

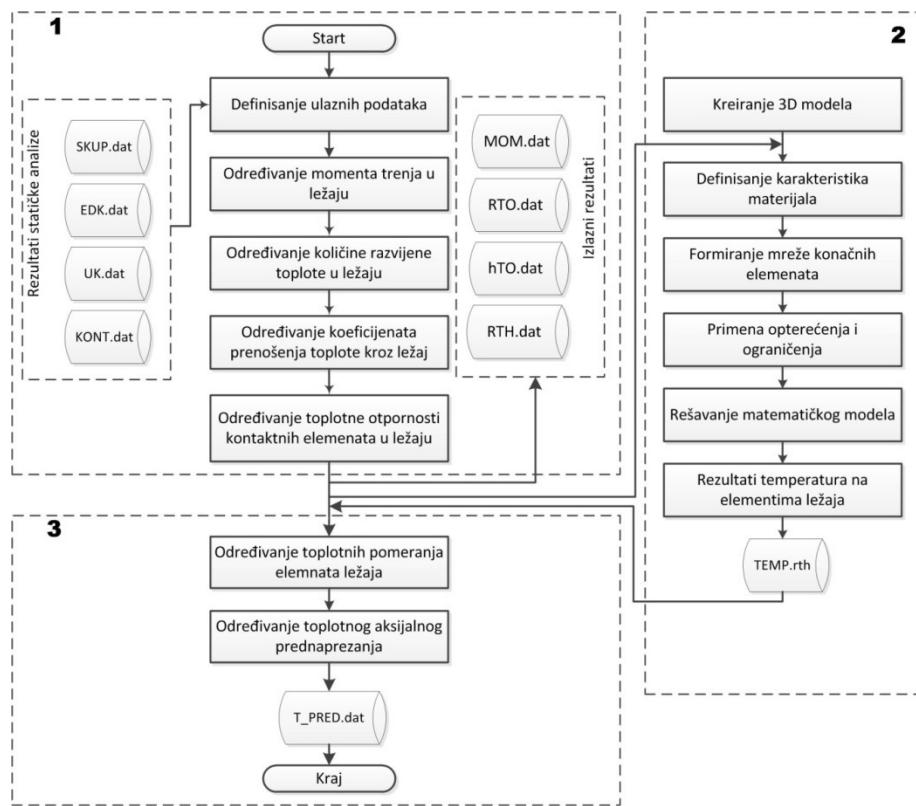
Programsko rešenje omogućava uzimanje u obzir delovanja radijalnog i aksijalnog opterećenja kao i momente savijanja oko  $y$  i  $z$  ose. Pored toga, omogućen je i izbor vrste kugličnih ležaja (radijalni ili ležaj sa kosim dodirom) kao i broja redova kotrljajnih tela (jednoredni ili dvoredni kuglični ležaji).



Slika 12. Model programskog rešenja za analizu statickog ponašanja

## 4.2 Programsко решење за анализу топлотног понашања

Zbog složености анализе топлотног понашања кугличних лежаја, програмско решење за анализу истог је поделено на три подсистема. У првом подсистему (1) програмског решења се из датотека програмског решења за статичку анализу учитавају вредности контакtnih оптерећења (EDK.dat), контакtnih површина (KONT.dat) угla контакта са стазама контролјања (UK.dat) и почетног аksijalnog преднапрезања (SKUP.dat). На основу ових вредности и дефинисаних улазних података се у овом делу програмског решења за сваку позицију контролајних тела одређује моменти тrena (MOM.dat) применом relacije (45) и количина развије топлоте у лежају (RTO.dat) на основу relacije (47). Moment trenja se određuje на бази угаоне брзине за свако контролајно тело, која је дефинисана relацијом (46). Такође у овом делу програмског решења се одређују и коeficijenti prenošenja топлоте за разматране zone лежаја према слици 8 и relacija (50) до (57) (hTO.dat). Nakon ovoga сe u prvom подсистему програмског решења izračunavaju koeficijenti провођења топлоте између контролајних тела и прстенова на основу relacija (58) i (59) (RTH.dat). На слици 13. je приказан model програмског решења за анализу топлотног понашања кугличних лежаја.



Slika 13. Model programskega rešenja za analizu topotnog poнаšanja kugličnih ležaja

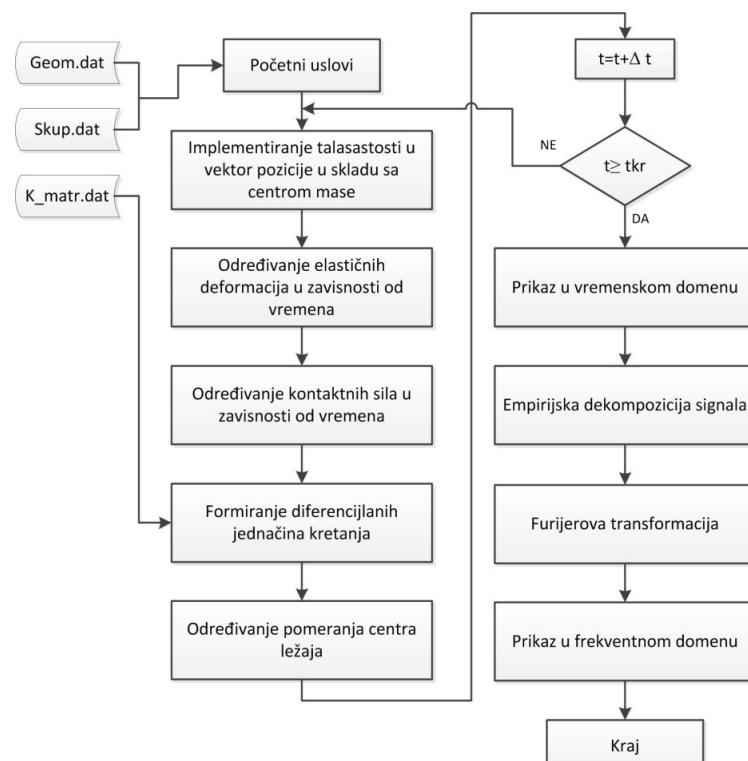
Određivanje rasporeda temperaturnih polja, као и вредности температура се vrši у другом делу (2) ovog програмског решења. Temperaturna polja se određuju на бази kreiranog 3D modela лежаја којег сачинjavaju: спољашњи, унутрашњи прsten и контролајна тела. Унутрашња геометрија лежаја је моделована са тачно дефинисаним геометријским карактеристикама. Nakon дефинисања карактеристика материјала на основу улазних података из првог дела и дефинисања мреже конаčних елемената и контакtnih парова, учитавају се вредности коeficijenata prenošenja и провођења топлоте, као и количине generisane топлоте из првог дела ovог programskega rešenja. Ovi параметри представљају оптерећења и ограничења за одређивање температurnih полja лежаја. Određivanje rasporeda температurnih полja, као и пораста температуре у зависности од времена је одређено у програмском систему опште намене базираном на методи конаčних елемената. На основу rasporeda температurnih полja и вредности температура на elementima лежаја, у трећем

podsistemu programskog rešenja (3) se određuju toplotne deformacije elemenata ležaja i prednaprezanje ležaja prouzorkovano toplotnim opterećenjem primenom relacije (65) i (66). Rezulati toplotne analize (TEMP.dat) se dalje koriste za analizu statičkog i dinamičkog ponašanja ležaja pod uticajem temperature.

U okviru ovog programskog rešenja su i izlazni rezultati podeljeni u tri dela radi prikazivanja u numeričkom i grafičkom obliku. Prvi deo izlaznih rezultata se odnosi na rezultate vezane za prenos toplote sa elemenata ležaja kao što su: Mometi trenja na stazama kotrljanja ( $M_u$ ,  $M_s$ ); količina razvijene toplote ( $H_u$ ,  $H_s$ ); koeficijenti prenošenja toplote sa razmatranih zona ležaja ( $h$ ) i provođenja toplote ( $R_{th}$ ) za svaku poziciju kotrljajnog tela. Drugi deo rezultata dođen u programskom sistemu opšte namene baziranom na metodi konačnih elemenata se odnosi na raspored temperaturnih polja i vrednosti temperatura na elementima ležaja i treći deo izlaznih rezulata se odnosi na toplotne deformacije elemenata ležaja i prednaprezanje ležaja usled toplotnih dilatacija.

### 4.3 Programsко rešenje за analizu dinamičkog ponašanja

Model programskog rešenja za analizu dinamičkog ponašanja je prikazan na slici 14. Ulagani podaci za dinamičku analizu su isti kao i za statičku, s tim da se pri dinamičkoj analizi definiše i vremenski interval. Pri dinamičkoj analizi u prvom delu se učitavaju geometrijski podaci o ležaju kao i elastične deformacije i ugao kontakta za svako kotrljajno telo, dođeni pri statičkoj analizi. U drugom delu se određuje talasastost u zavisnosti od vremenskog intervala primenom relacije (28). Vremenski interval je jednak vremenu za koje kotrljajna tela naprave jedan pun krug. Određivanje elastičnih deformacija i kontaktnih sila za svaki vremenski interval se odvija u trećoj fazi, pri čemu se za svaki vremenski interval proverava uslov dat relacijama (78) i (79). Ukoliko je pomenuti uslov zadovoljen izračunavaju se jednačina kretanja prema relaciji (80). Jednačina kretanja je rešavana u programskom sistemu MatLab korišćenjem *ODE* funkcije.



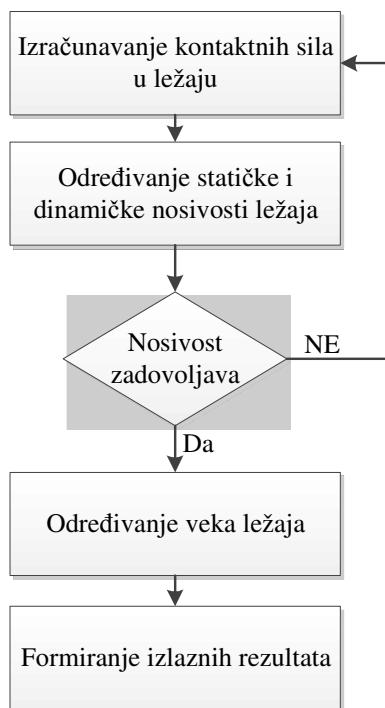
Slika 14. Model programskog rešenja za analizu dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja

Na osnovu prethodnog u trećem delu programskog rešenja za dinamičku analizu se dobijaju pomeranja centra ležaja u vremenskom, a nakon Furijerove transformacije, u frekventnom domenu. U ovom delu programskega rešenja je definisana i mogućnost da se analiza u frekventnom domenu može raditi i preko empirijske dekompozicije kombinovane sa Furijerovom transformacijom.

#### 4.4 Programske rešenje za određivanje veka kugličnih ležaja

Programsko rešenje za određivanje veka kugličnih ležaja se zasniva na programskom rešenju za statičku analizu. Programske rešenje za određivanje veka ležaja ima za cilj da utvrdi zavisnost zamora staza kotrljanja od njegovih konstrukcionih parametara, materijala, kinematike i eksploatacionalih uslova. Matematički model i programske rešenje je razvijen na bazi Palmagren-Lundber-ove teorije koja se zasniva na Weibull-ovoj teoriji razaranja. Na slici 15 je prikazan algoritam za određivanje veka ležaja.

U prvom delu ovog programskog rešenja se na osnovu geometrije ležaja primenom relacija (83-85) određuje dinamička nosivost staza kotrljanja i ukupna dinamička nosivost ležja. Nakon ovoga se na osnovu kontaktnih opterećenja dobijenih u programskom rešenju za statičku analizu određuju zbir kontaktnih sila u ležaju na osnovu relacije (86). U poslednjem delu programskog rešenja se na osnovu dinamičke nosivosti i kontaktnog opterećenja određuje vek za staze kotrljanja relacijom (87), kao i ukupni vek ležaja relacijom (88). Izlazni rezultati iz ovog programskog rešenja su: statička i dinamička nosivost ležaja i vek ležaja u zavisnosti od parametara koji se razmatraju u statičkoj analizi.



Slika 15. Model programskog rešenja za određivanje veka kugličnih ležaja

## 5.0 ZAKLJUČAK

Razvijeno programsko rešenje za analizu ponašanja kugličnih ležaja predstavlja namenski koncipirano i razvijeno rešenje sa ciljem usavršavanja procesa istraživanja uticaja kostrukcionih (zazora/preklopa, prednaprezanja, krutosti), tehnoloških (hrapavosti, talasastosti) i eksplatacionalih parametara (temperature, broja obrtaja) na staticko i dinamičko ponašanje kugličnih ležaja/ležajnih sklopova, odnosno identifikaciju ponašanja u eksplataciji i određivanje veka.

Razvijeno programsko rešenje, je maksimalno orjentisano korisniku i dovoljno valjano za efikasnu primenu. Samo programsko rešenje se sastoji iz četiri celine (modula) koje su međusobno povezana, tako da se može reći da je razvijeno programsko rešenje modularne gradnje. Modularna gradnja programskog rešenja je omogućila njegovo povezivanje i sa programskim sistemima koji baziraju na metodi konačnih elemenata.

Posebna pažnja je posvećena programskom rešenju za analizu statickog, dinamičkog ponašanja i određivanje veka. Programska rešenja za analizu statickog ponašanja omogućava određivanje krutosti u svim pravcima za svako kotrljajno telo, staticke i dinamičke nosivosti na bazi ekvivalentnih kontaktnih opterećenja za svaku stazu kotrljanja. Pri tome je zbog široke primene kugličnih ležaja sa kosim dodirom, koji omogućavaju veliki broj varijantnih rešenja, posebna pažnja posvećena određivanju krutosti ovih ležaja. Sparivanjem ovih ležaja u jednom osloncu može se uticati na krutost ležajnog sklopa, posebno aksijalnu i radijalnu krutost. Programska rešenja su razvijena na bazi Hertz-ove teorije kontakta i John-Harris-ove raspodele opterećenja na kotrljajna tela. Model u ovom tehničkom rešenju je proširen uvođenjem temperaturnih dilatacija, preklopa/zazora i talasastosti staza kotrljanja u jednačine ravnoteže. Takođe u modelu je uključeno i delovanje sila inercije (centrifugalna sila i giroskopski moment) na kotrljajna tela.

Matematički model za nelinearnu analizu dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja je definisan na bazi kinetičke i potencijalne energije za sve elemente ležaja, nakon čega su ove energije korišćenjem Langražovih jednačina implementirane u jednačine kretanja koje opisuju dinamički model ležaja. Toplotni model je baziran na statickom modelu, zakonima termodinamike i prostiranja toplice. Matematički model za određivanje veka je takođe razvijen na osnovama statickog modela i *Ludenberg-Palmgren-ove* teorije.

Prikazani matematički modeli i razvijeno programsko rešenje, se može posmatrati kao opšti model za analizu kugličnih ležaja. Opštost modela se može zaključiti na osnovu izbora specijalnih ležaja sa kosim dodirom koji su poslužili za verifikaciju. Naime, identifikovana je grupa preciznih ležaja sa uglom kontakta u oblasti  $10^0 - 30^0$  (ležaji za glavna vretena) sa vrlo širokim opsegom brojeva obrtaja i kombinovanih spoljašnjih opterećenja, uz različite varijante ugradnje, kao i različite varijante prednaprezanja. Druga razmatrana grupa specijalnih ležaja sa kosim dodirom sa uglom kontakta u oblasti  $30^0 - 60^0$  (uležištenje točka vozila i potisni ležaja za kompresore kamiona) sa izrazitim dinamičkim spoljašnjim kombinovanim opterećenjem, što takođe ima začajan uticaj na vek.

## 6.0 LITERATURA

- [1] Antoine, J -F., Abba, G., Molinari, A.: A New Proposal for Explicit Angle Calculation in Angular Contact Ball Bearing, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, Vol. 128, ISSN: 1050-0472, 2006, Pages 468-478.
- [2] Antoine, J-F., Visa, C., Sauvey, C.: Approximate Analytical Model for Hertzian Elliptical Contact Problems, Journal of Tribology, Transactions of the ASME, Vol. 128, ISSN: 0742-4787, 2006, Pages 660-664.
- [3] Arumugam, P., Swarnamani, S., Prabhu, B. S.: An Experimental Investigation on the Static and Dynamic Characteristics of Journal Bearings Under the Influence of Twisting Misalignment, ASME Journal of Tribology, Vol. 119, No. 1, Pages.188–192, 1997.
- [4] Bossmanns, B.: Thermo-mechanical modeling of motorized spindle systems for high speed milling, Ph.D. Dissertation, Purdue University, 1997.
- [5] Bossmanns, B., Jay, F. T.: A thermal model for high speed motorized spindles, International Journal of Machine Tools & Manufacture, ISSN 0890-6955, Vol. 39, 1999, Pages 1345–1366.
- [6] Bourdon, A., Rigal, J. Play, F., D.: Static Rolling Bearing Models in a CAD. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part I - Rolling Bearing Model, Journal of Tribology, Transactions of the ASME, Vol. 121, ISSN: 0742-4787, 1999, Pages 205-214.
- [7] Bourdon, A., Rigal, J. Play, F. D.: Static Rolling Bearing Models in a CAD. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part II - Complete Assembly Model, Journal of Tribology, Transactions of the ASME, Vol. 121, ISSN: 0742-4787, 1999, Pages 215-223.
- [8] Cao, Y.: Modeling of high-speed machine tools spindle system, Ph.D thesis, The University of British Columbia, 2006.
- [9] Čermelj, P., Boltemar, M.: An indirect approach to investigating the dynamics of a structure containing ball bearings, Journal of Sound and Vibration Vol 276, ISSN: 0022-460X, 2004, Pages 401-417.
- [10] Changqing, B., Qingyu, X.: Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness, Journal of Sound and Vibration, Vol. 294, ISSN: 0022-460X, 2006, Pages 23–48.
- [11] Chi, W. L., Jay, F. T., Kamman, J.: An integrated thermo-mechanical-dynamic model to characterize motorized machine tool spindles during very high speed rotation, International Journal of Machine Tools and Manufacture, Machine Engineering, ISSN 0890-6955, 2003, Vol. 43, Pages 1035–1050.
- [12] Choudhury, A., Tandon, N. A: theoretical model to predict vibration response of rolling bearings to distributed defects under radial load, ASME Journal of Vibration and Acoustics 120, 1998, Pages 214–220.
- [13] Crawford, R. M., Long, T.: Ball Bearing Dynamic Analysis Using Computer Methods - Part 1: Analysis, Journal of Tribology, Transactions of the ASME, Vol. 118, ISSN: 0742-4787, 1996, Pages 52-58.
- [14] Gargiulo, E. P.: A simple way to estimate bearing stiffness, Machine Design 52, 1980, Pages 107-110
- [15] Harris, T.A.: Rolling bearing analysis, Foutrh edition, John Wiley & Sons, Inc , 2001, ISBN: 0-471-35457-0.
- [16] Harris, T.A., Michael N. K.: Rolling bearing analysis: Advanced Concepts of Bearing Technology, Fifth edition, Taylor & Francis Group, ISBN: 0-8493-7182-X, 2007.
- [17] Harris, T.A., Michael N. K.: Rolling bearing analysis: Essential Concepts of Bearing Technology, Fifth edition, Taylor & Francis Group, 2007, ISBN: 0-8493-7183-X.

- [18] Harsha, S. P., Sandeep, K., Prakash, R.: The effect of speed of balanced rotor on nonlinear vibrations associated with ball bearings, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, ISSN: 0020-7403, 2003, Pages 225–240.
- [19] Harsha, S. P., Kankar, P.K.: Stability analysis of a rotor bearing system due to surface waviness and number of balls, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.46, ISSN: 0020-7403, 2004, Pages 1057–1081.
- [20] Harsha, S. P., Sandeep, K., Prakash, R.: Nonlinear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness, Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, ISSN: 0022-460X, 2004, Pages 557–580.
- [21] Harsha, S. P.: Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings, Journal of Sound and Vibration, Vol. 290, ISSN: 0022-460X, 2006, Pages 65–100.
- [22] Harsha, S. P.: Nonlinear dynamic analysis of rolling element bearings due to cage run-out and number of balls, Journal of Sound and Vibration, Vol. 289, ISSN: 0022-460X, 2006, Pages 360–381.
- [23] Harsha, S.P.: Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported by rolling element bearings due to radial internal clearance effect, Mechanism and Machine Theory, Vol. 41, ISSN: 0094-114X, 2006,Pages 688–706.
- [24] Houpert, L.: A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearing, Proc. at the STLE/ASME Tribology Conf., San Francisco, ASME J. Tribol., 119, 1997, pp. 851–857.
- [25] Houpert, L.: An Engineering Approach to Hertzian Contact Elasticity - Part I, Journal of Tribology, Transactions of the ASME, ISSN: 0742-4787, 2001, Vol. 123, Pages 582-588.
- [26] Jang, G.H., Jeong, S.W.: Analysis of a ball bearing with waviness considering the centrifugal force and gyroscopic moment of the ball. ASME J. Tribol., 2003, Vol 125, Pages 487–498.
- [27] Jang, G. H., Jeong, S.-W.: Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness, Journal of Sound and Vibration, ISSN: 0022-460X, 2004, Vol. 269, Pages 709-726.
- [28] Jedrzejewski, J. , Kowal ,Z., Kwaśny, W., Modrzycki W.: Hybrid Model of High Speed Machining Centre Headstock, Ann. CIRP ISBN 3-905 27728-X , 2004, Vol. 53/1.
- [29] Jedrzejewski, J., Kowal, Z., Kwasny, W., Modrzycki W.: High-speed precise machine tools spindle units improving, Journal of Materials Processing Technology, ISSN 0036-8792, 2005, Vol 162–163, Pages 615–621.
- [30] Jedrzejewski, J.: Effect of the thermal contact resistance on thermal behaviour of the spindle radial bearings, International Journal of Machine Tools & Manufacture, ISSN 0890-6955, 1988, Vol. 28, Pages 409-416.
- [31] Jones, A.B.: A general theory of elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. ASME J Basic Eng., 1960, Vol. 82, Pages 309–320.
- [32] Kang, Y., Shen, P.-C., Huang, C.-C., Shyr, S.-S., Chang, Y.-P.: A modification of the Jones–Harris method for deep-groove ball bearings, Tribology International, Vol. 39, ISSN: 0301-679X, 2006, Pages 1413–1420.
- [33] Kim, S. M., Sun, K. L.: Prediction of thermo-elastic behavior in a spindle bearing system considering bearing surroundings, International Journal of Machine Tools and Manufacture, ISSN 0890-6955, 2001, Vol. 41, Pages 809–831.
- [34] Kim, S. M., Lee, S. K.: Spindle Housing Design Parameter Optimization Considering Thermo-Elastic Behaviour, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, ISSN 1433-3015, 2005, Vol. 25, Pages 1061-1070.
- [35] Li, H., Yung, C. S.: Analysis of bearing configuration effects on high speed spindles using an integrated dynamic thermo-mechanical spindle model, International Journal of Machine Tools and Manufacture, ISSN 0890-6955, 2004, Vol. 44, Pages 347–364.

- [36] Lin, C.-M.: Analysis for the Stiffness of Ball Bearings, Master's thesis, Chung Yuan Christian University Department of Mechanical Engineering, 2002.
  - [37] Lioulios, A.N., Antoniadis, I.A.: Effect of rotational speed fluctuations on the dynamic behaviour of rolling element bearings with radial clearances, International Journal of Mechanical Sciences, ISSN 0020-7403 2006, Vol. 48, Pages 809–829.
  - [38] Meyer, L.D., Ahlgran, F.F., Weichbrodt, B.: An analytical model for ball bearing vibrations to predict vibration response to distributed defects, ASME Journal of Mechanical Design, 1980, Vol. 102, Pages 205–210.
  - [39] Min, X., Shuyun, J., Ying, C.: An improved thermal model for machine tool bearings, International Journal of Machine Tools and Manufacture, ISSN 0890-6955, 2007, Vol. 47, Pages 53-62.
  - [40] Nataraj, C., Harsha, S.P.: The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 13, ISSN: 1007-5704 Issue 4, 2008, Pages 822-838.
  - [41] O'Brien, M.J., Presser, N., Robinson, E.Y.: Failure analysis of three Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> balls used in hybrid bearings, Engineering Failure Analysis, ISSN 1350-6307, 2003, Vol. 10, Pages 453–473.
  - [42] Stein, J.L. Tu, J.F.: A state-space model for monitoring thermally induced preload in anti-friction spindle bearings of high-speed machine tools, ASME Trans. J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 116 (1994) 372–386.
  - [43] Sun, M. K., Kang, J. L., Sun, K. L.: Effect of bearing support structure on the high-speed spindle bearing compliance, International Journal of Machine Tools and Manufacture, ISSN 0890-6955, 2002, Vol. 42, Pages 365–373.
  - [44] Tamura, H., Tsuda, Y.: On the static running accuracy of ball bearings, Bulletin of the JSME 28, 1240-1246, 1985.
  - [45] Tung, L., N., Lin, J., F.: Ball bearing skidding under radial and axial loads, Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, ISSN 0094-114X, 2002, Pages 91-113.
  - [46] Upadhyay, S. H., Harsha, S. P., Jain, S. C.: Analysis of Nonlinear Phenomena in High Speed Ball Bearings due to Radial Clearance and Unbalanced Rotor Effects, Journal of Vibration and Control, Vol. 16 (1), Pages 65–88, 2010.
  - [47] Villa, C. J., Sinou.,J., Thouverez, F.: Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 13, ISSN: 1007-5704, 2008, Pages 804–821.
  - [48] Wang, L., Dezhi, Z.; Gu, L.: Nonlinear Dynamics Behaviors of a Rotor Roller Bearing System with Radial Clearances and Waviness Considered, Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 21, ISSN: 1000-9361, 2008, Pages 86-96.
  - [49] Wensing, J.A.: On the dynamics of ball bearings, PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, ISBN: 90-36512298, 1998.
  - [50] Zaretsky, E. V., Vlcek, B. L., Hendricks, R.C.: Effect of Silicon Nitride Balls and Rollers on Rolling Bearing Life, NASA/TM—2005-213061, Glenn Research Center, 2005.
  - [51] Zverv, I., Eun, I.U., Chung, W.J., Lee, C.M: Simulation of Spindle Units Running on Rolling Bearings, Int J Adv Manuf Technol (2003) 21:889–895
  - [52] Zverv, I., Pyoun, Y.S., Lee, B. K., Kim, J. D., Jo, I., Combs, A.: An elastic deformation model of high speed spindles built into ball bearings, Journal of Materials Processing Technology, ISSN 0924-0136, 2005, Vol. 170, Pages 570-578.
  - [53] Živković, A.: Računarska i eksperimentalna analiza ponašanja kugličnih ležaja za specijalne namene, doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, NoviSad, 2013.
-

- [54] Živković, A., Zeljković, M., Tabaković, S.: Nonlinear dynamic behaviours of ball bearing due to raceways waviness, International Conference on Manufacturing Science and Education – MSE, 2013, pp, 121-124, ISBN: 1843-2522.
- [55] Živković, A., Zeljković, M., Tabaković, S.: Nonlinear mathematical model to determine the stiffness of the automotive wheel bearing, International Conference on Accomplishments in Electrical and Mechanical Engineering and Information Technology – DEMI, 2013, pp. 155-162, ISBN: 978-99938-39-45-3
- [56] Živković, A., Zeljković, M.: Analiza statičkog ponašanja integrisanog ležaja točka 9642506980, Izveštaj o ispitivanju integrisanog ležaja točka rađen za "FKL", Temerin, 2013.
- [57] Živković, A., Zeljković, M.: Analiza statičkog ponašanja aksijalnog ležaja kvačila, Izveštaj o ispitivanju aksijalanog ležaja spojnice rađen za "FKL", Temerin, 2013.

**Napomena:** Tehničko rešenje predstavlja rezultat istraživanja na projektu "Savremeni prilazi u razvoju specijalnih rešenja uležištenja u mašinstvu i medicinskoj protetici" TR 35025, finansiranog od strane Ministarstva prosvete i nauke Republike Srbije.

## PRILOZI

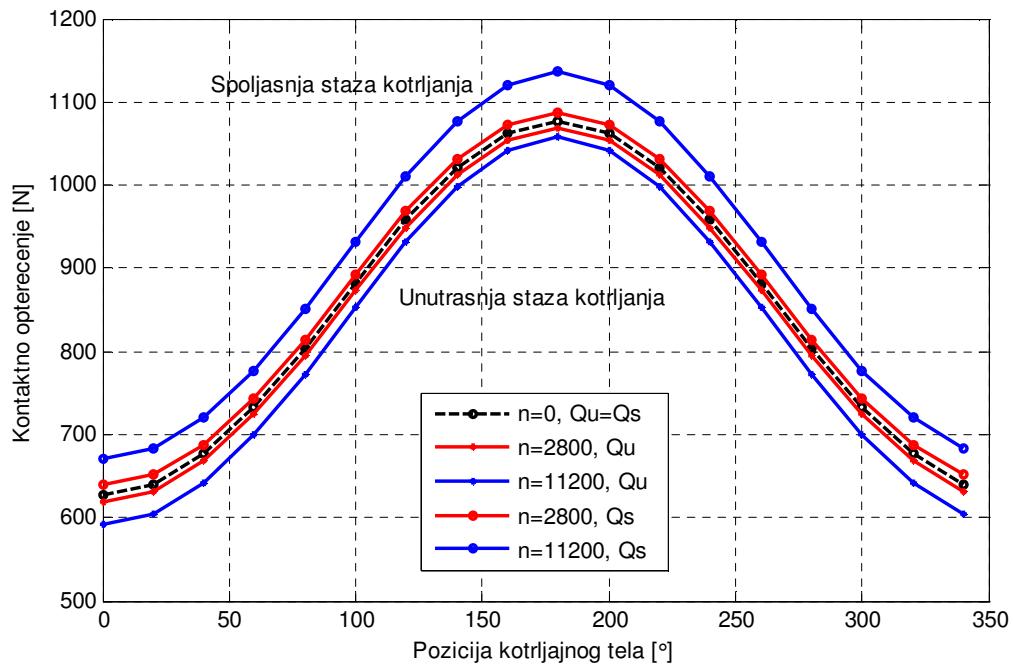
U okviru statičkog, toplotnog i dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja izvršena je analiza ponašanja kugličnih ležaja sa kosim dodirom za uležištenje glavnih vretna (SKF 7011CDGA), kugličnih ležaja sa kosim dodirom za uležištenje točka vozila (ILT 9642506980) i kugličnih ležaja sa kosim dodirom za kompresore kamiona (Knorr Bremse Y0104066). Analiza je sprovedena s ciljem da se što sveobuvatnije analiziraju odgovarajuća konstrukcionalna rešenja ležaja, kao i da se na ovaj način verifikuju rezultati razvijenih programskih rešenja. U nastavku će biti prikazani samo pojedini rezultati pomenutih analiza. U tabeli P1 su prikazane osnovne geometrijske karakteristike razmatrani ležaja.

*Tabela P1. Geometrijski parametri razmatranih ležaja*

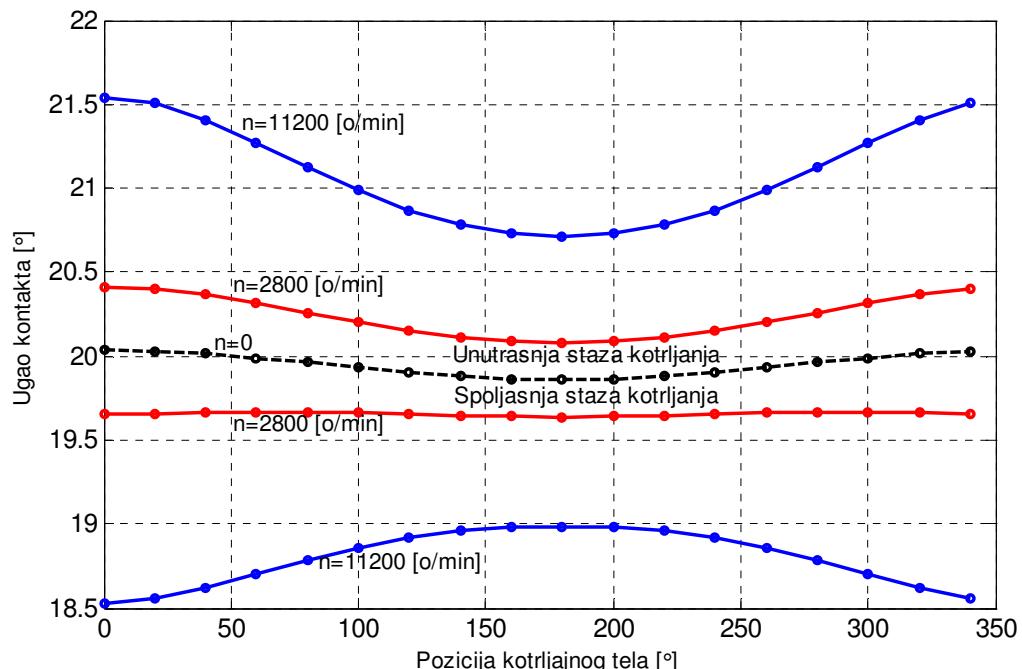
Tip ležaja		SKF 7011CDGA	ILT 9642506980	Knorr Bremse Y0104066
Prečnik prvrta ležaja [mm]	d	55	32	40,5
Spoljašnji prečnik [mm]	D	90	84	65,5
Širina ležaja [mm]	B	18	46	16
Broj kotrljajnih tela [-]	Z	18	11	18
Srednji prečnik [mm]	$d_m$	72,5	58	53
Nominalni ugao kontakta [ $^{\circ}$ ]	$\alpha_0$	15	32	40
Prečnik kotrljajnih tela [mm]	$d_k$	10,319	13,494	7,144

### ***Prilog P1 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za uležištenje glavnih vretna***

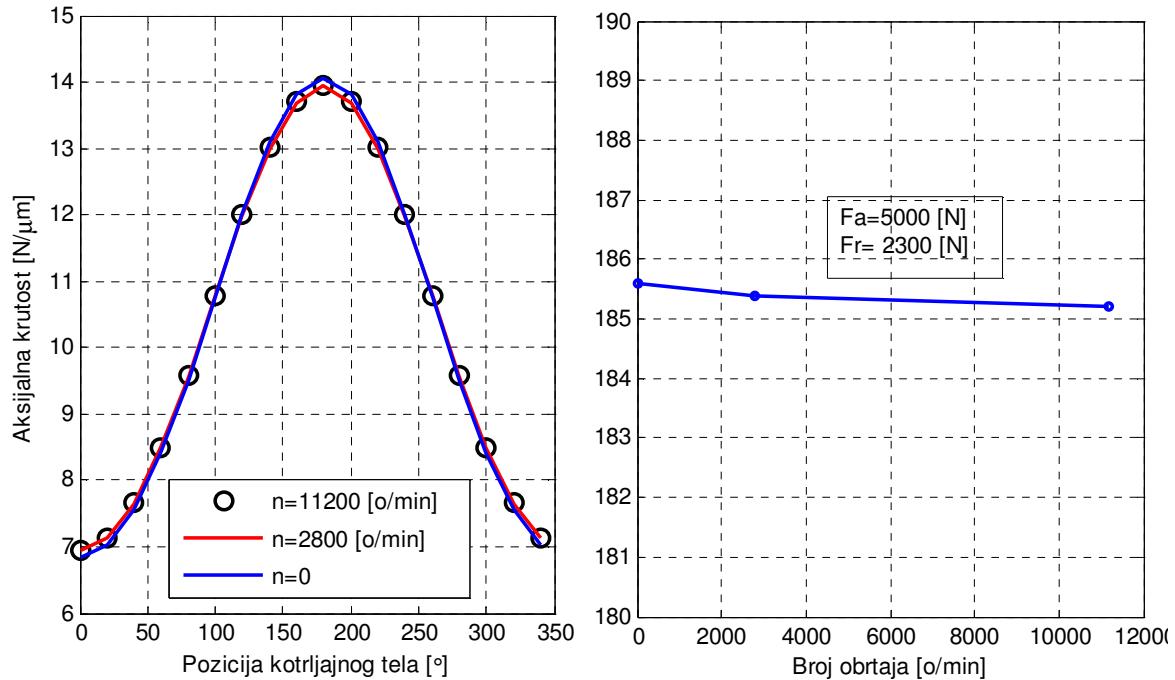
Da bi se izvršilo ispitivanje samih ležaja, predpostavljeno je da je glavno vreteno apsolutno kruto, u tom slučaju opterećenja koje deluju na vrh vretna se direktno prenose na ležaje, na osnovu čega je:  $F_a=F_x=5000$  [N]  $F_r=F_y=4000$  [N]. Analizom su obuhvaćeni uticaji ugla kontakta, kontaktnih deformacija, kontaktnih opterećenja, pomeranja centra ležaja, krutosti kako pojedinačnog tako i ležaja u raspoloženju, pri delovanju datih opterećenja, u stacionarnom temperaturnom stanju i za sedam vrednosti brojeva obrtaja: 2800, 3550, 4500, 5600, 7100, 9000 i 11200.



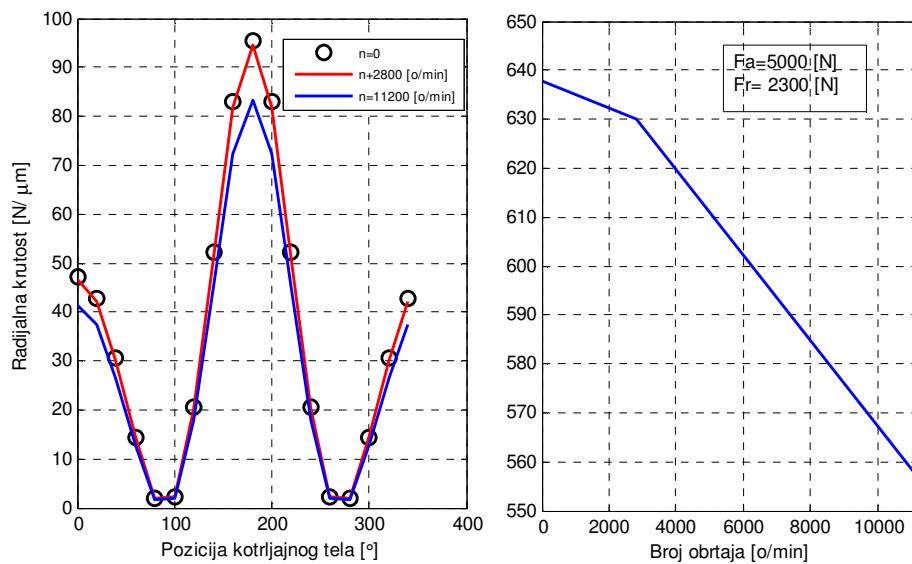
Slika P1. Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela i broja obrtaja za  $Fr=2300\text{ N}$  i  $Fa = 5000\text{ N}$  za ležaje 7011 CDGA



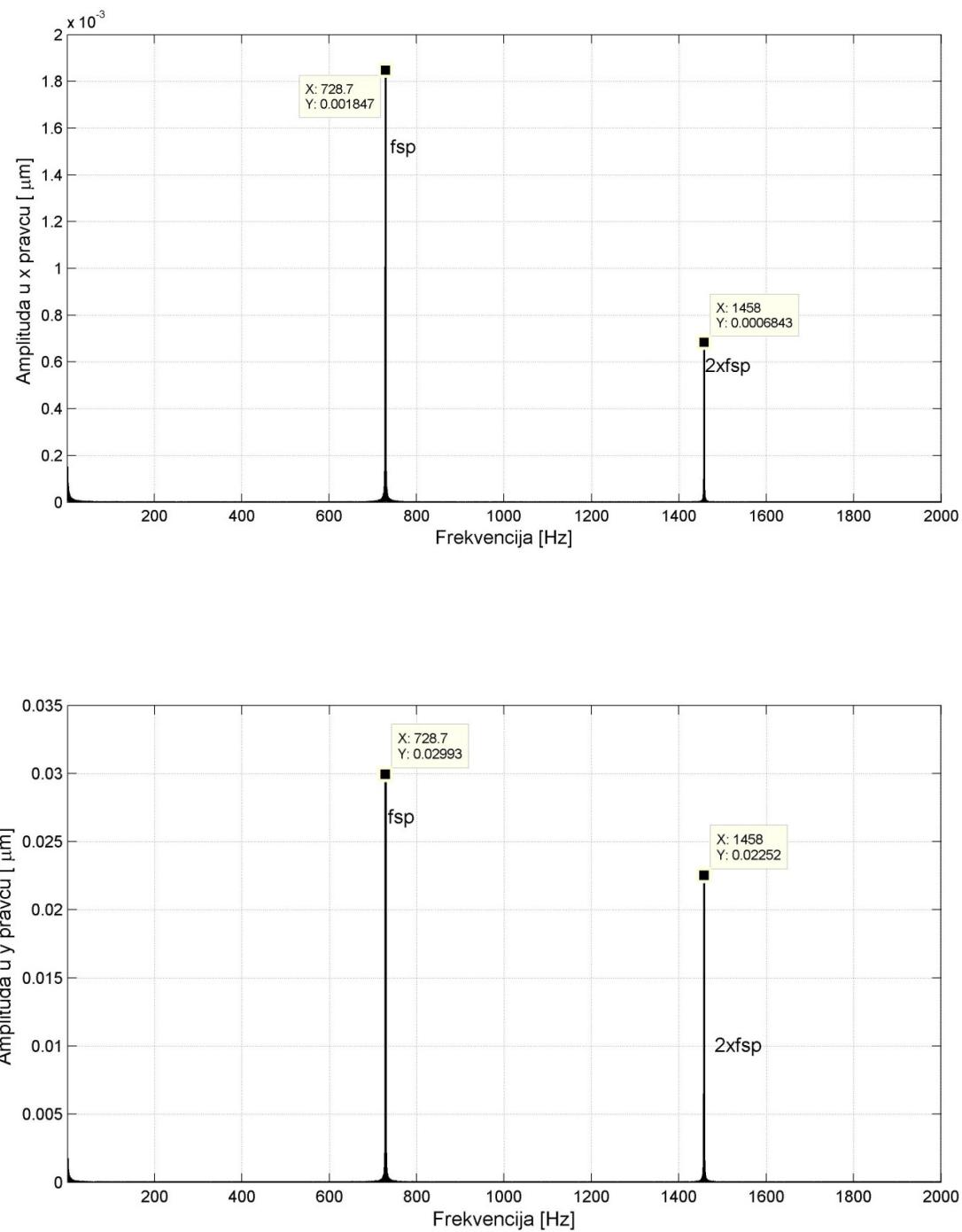
Slika P2. Promena ugla kontakta na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela i broja obrtaja za  $Fr=2300\text{ N}$  i  $Fa = 5000\text{ N}$  za ležaje 7011 CDGA



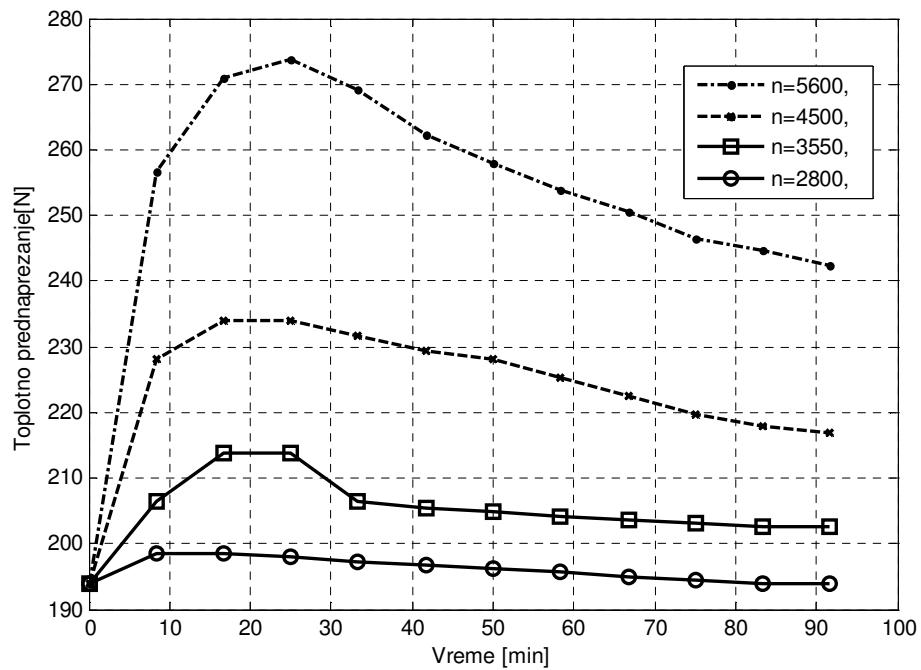
Slika P3. Promena aksijalne krutosti: a) za svaku poziciju kotrljajnih tela; b) u zavisnosti od broja obrtaja pri srednjem prednaprezzanju za  $Fr=2300 \text{ N}$  i  $Fa=5000 \text{ N}$   
za ležaj 7011 CDGA



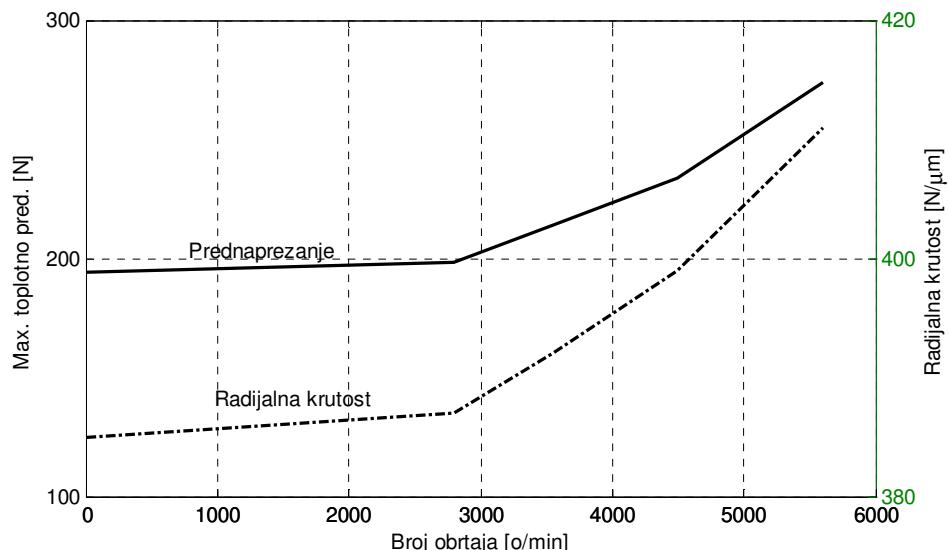
Slika P4. Promena radijalne krutosti: a) za svaku poziciju kotrljajnih tela; b) u zavisnosti od broja obrtaja pri srednjem prednaprezzanju za  $Fr=2300 \text{ N}$  i  $Fa=5000 \text{ N}$   
za ležaj 7011 CDGA



Slika P5. Promena amplitude u pravcu: x ose i y ose pri malom prednaprezanju za ležaja 7011 CDGA



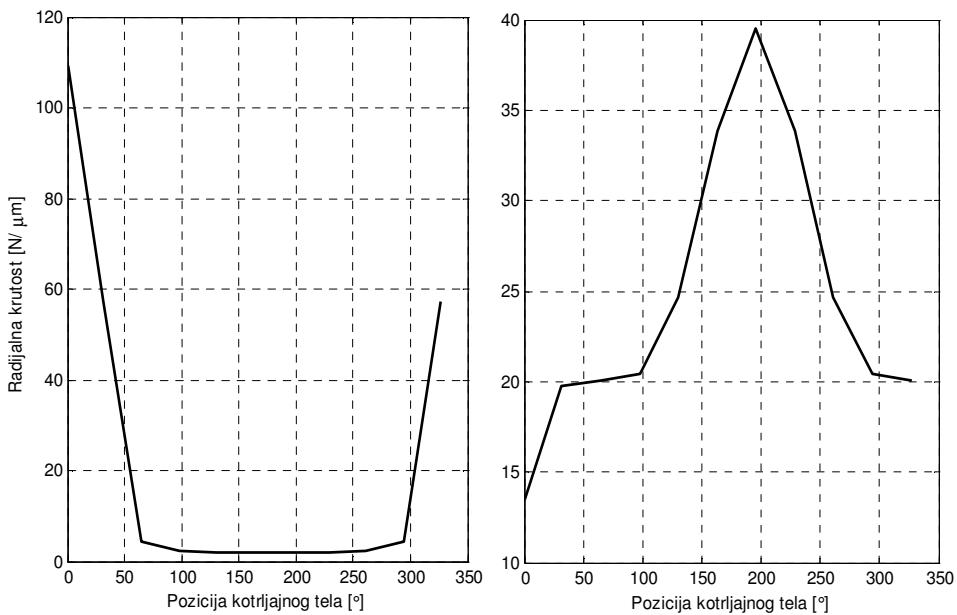
Slika P6. Promena toplovnog prednaprezanja u vremenu za različite brojeve obrtaja za 7011 CDGA pri malom prednaprezzanju



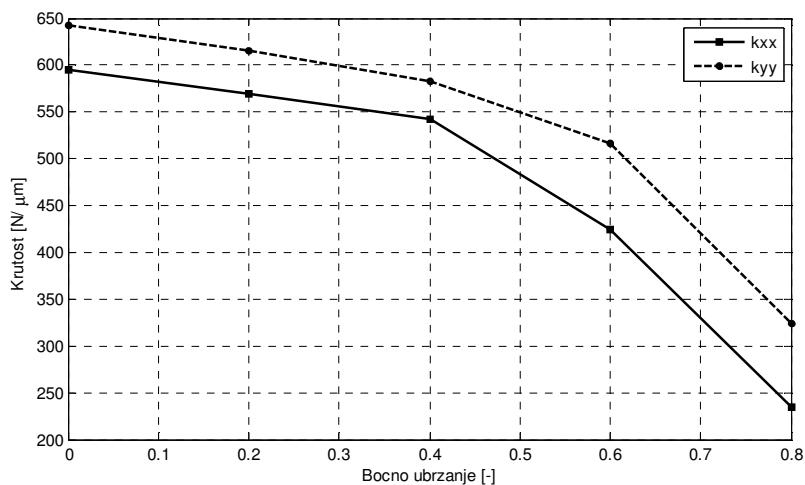
Slika P7. Promena maksimalnog toplovnog prednaprezanja u zavisnosti od broja obrtaja za 7011 CDGA pri malom prednaprezzanju

## Prilog P2 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za uležištenje točka vozila

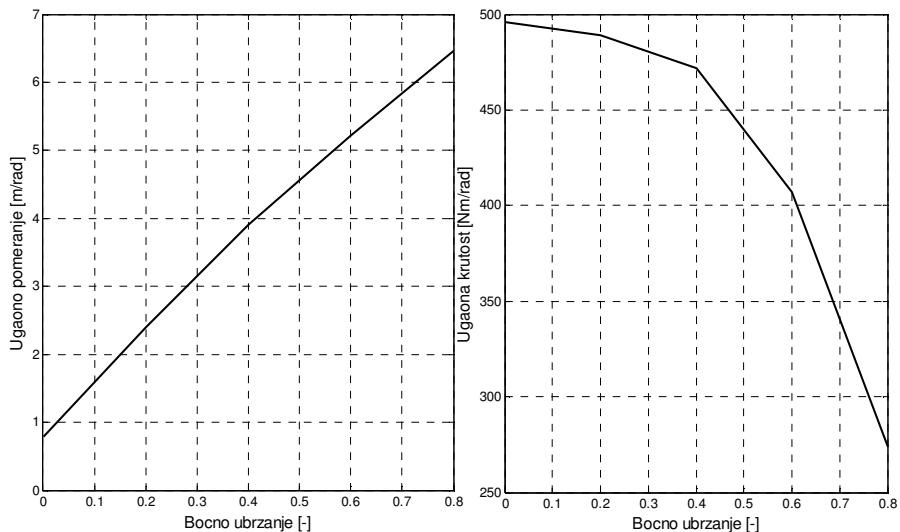
Analiza ponašanja integrisanog ležaja točka vozila je izvršena na bazi sila reakcije na točak vozila za različite eksplatacione uslove. Takođe je i izvršena analiza uticaja bočnog ubrzanja na aksijalnu, radijalnu i savojnu krutost razmatranog ležaja, kao i na vek ležaja. Opterećenja koja deluju na ležaj su određena na bazi bočnog ubrzanja za određene uslove ispitivanja i referentnu masu vozila.



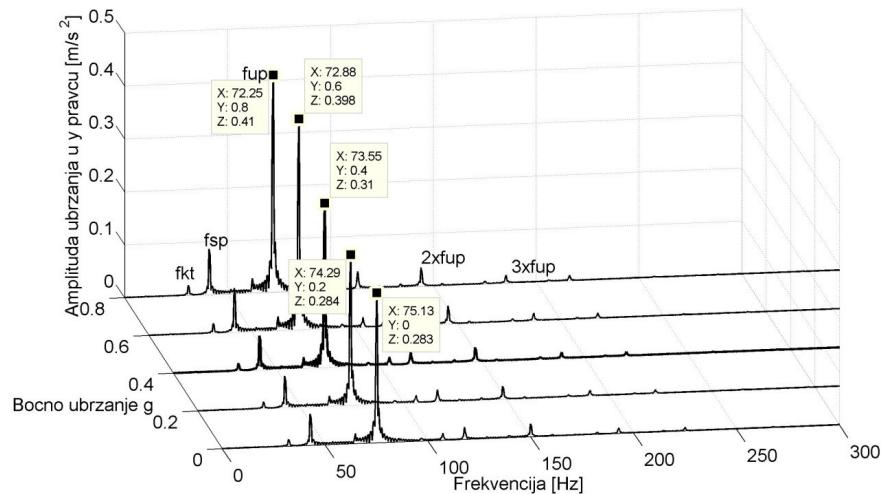
Slika P8. Promena radijalne krutosti za svako kotrljajno telo kod ILT II pri  $G=0.4$   
za: a) stazu I; b stazu II



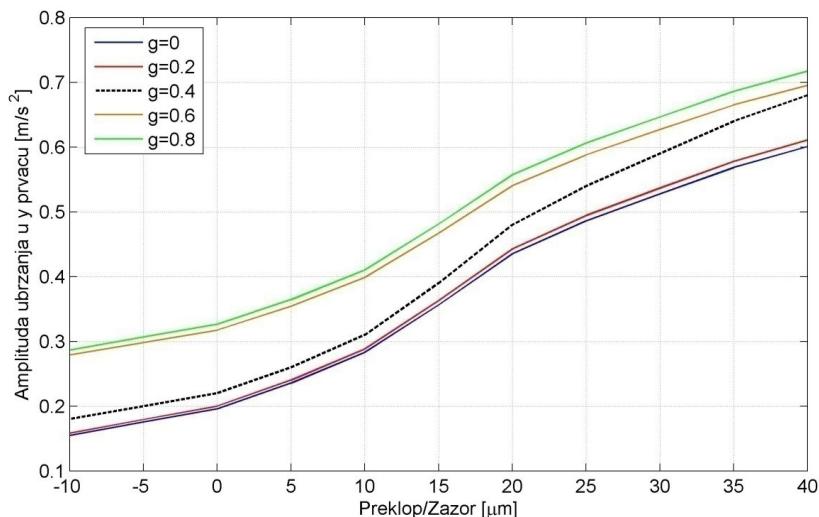
Slika P9. Promena aksijalne i radikalne krutosti u zavisnosti od ubrzanja za ILT II



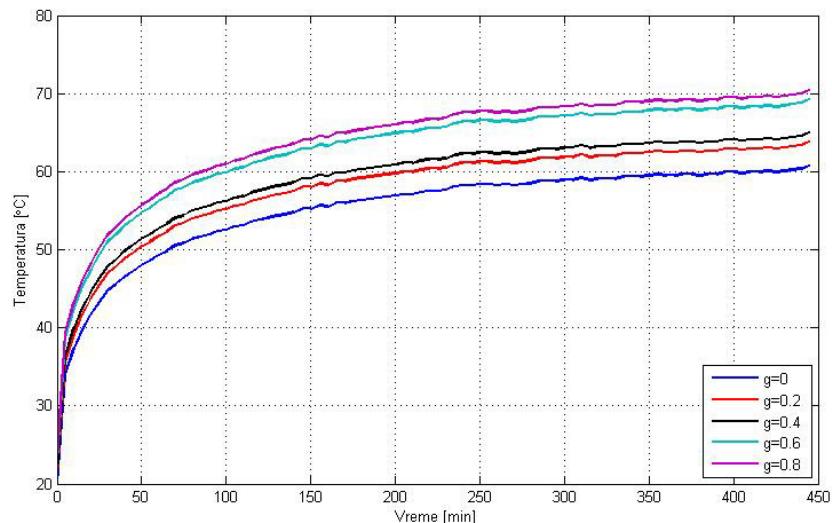
Slika P10. Promena ugaonog pomeranja i ugaone krutosti u zavisnosti od bočnog ubrzanja kod ILT II



Slika P11. Promena amplitudne ubrzanja i frekvencije unutrašnjeg prstena ILT II u zavisnosti od bočnog ubrzanja pri zazoru od  $10 \mu\text{m}$

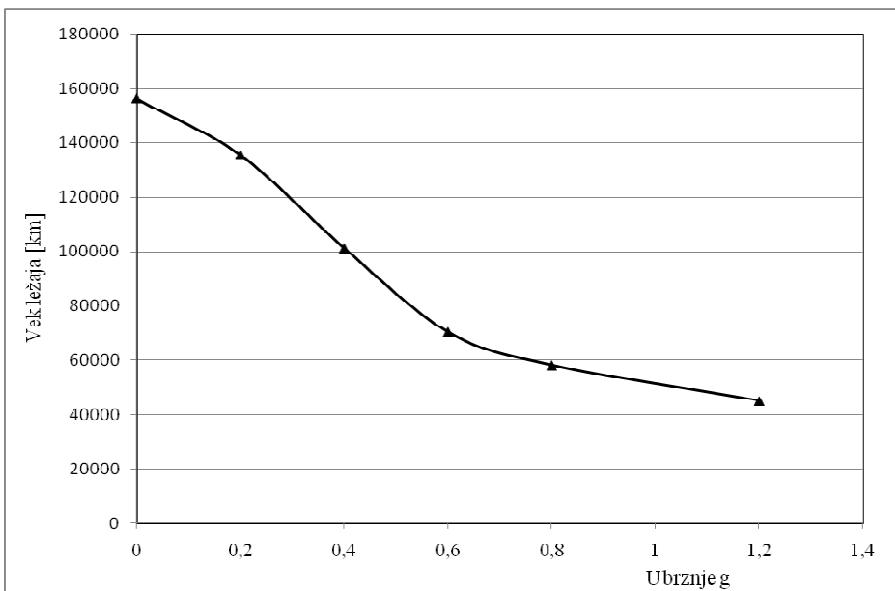


Slika P12. Promena amplitudne ubrzanja u zavisnosti od preklopa/zazora za različita bočna ubrzanja pri delovanju kombinovanog opterećenja za ILT II



Slika P13. Porast tempearture na unutrašnjoj površini unutrašnjeg prstena (T1) integrisanog ležaja točka vozila u zavisnosti od vremena za razmatrana bočna ubrzanja

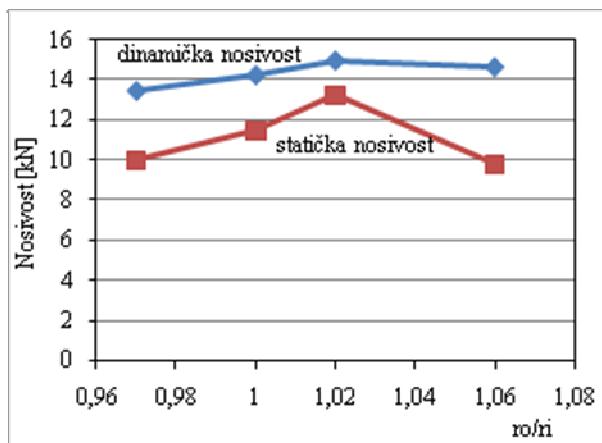
---



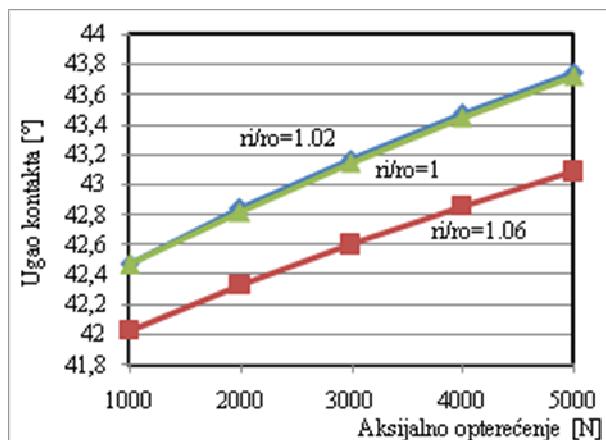
Slika P14. Promena veka integrisanog ležaja točka u zavisnosti od bočnog ubrzanja

#### Prilog P3 - Rezultati analize ponašanja kugličnih ležaja za kompresore kamiona

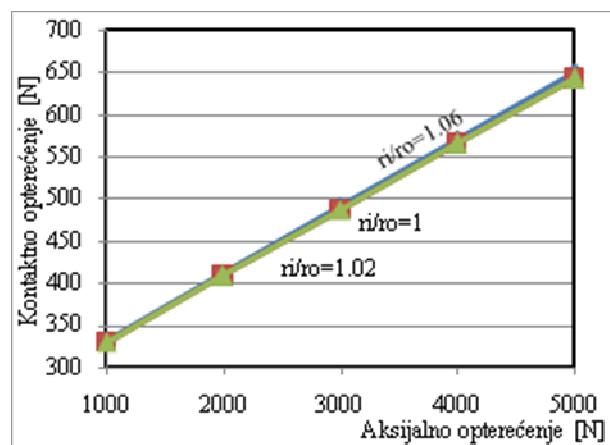
Analiza ponašanja kugličnog ležaja Knorr Bremse Y0104066 je izvršena za slučaj kada je spojница opterećena od 4000 do 8000 N i pri broju obrtaja  $n=0$  o/min. Pri analizi su razmatrani različiti radijusi staza kotrljanja.



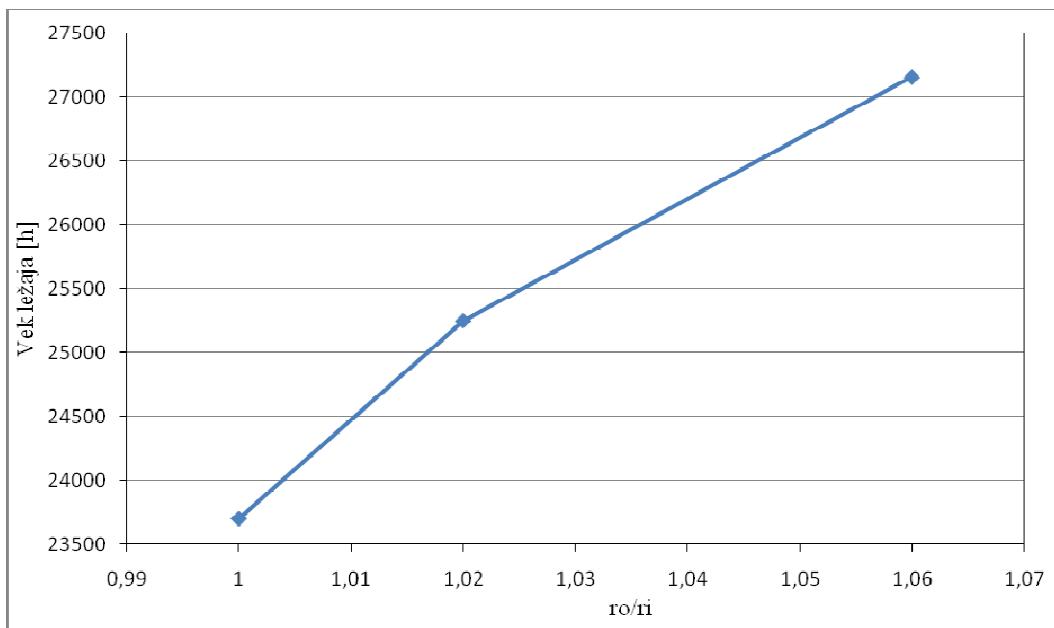
Slika P15. Promena nosivosti analiziranog ležaja u zavisnost od odnosa radijusa staza kotrljanja



Slika P16. Promena ugla kontakta u zavisnosti od opterećenja za razmatrane odnose radijusa staza kotrljanja



Slika P17. Promena kontaktnih opterećenja u zavisnosti od opterećenja za razmatrane odnose radijusa staza kotrljanja



Slika P18. Promena veka ležaja u zavisnost od odnosa radijusa staza kotrljanja



Наш број: 01.сл

Ваш број:

Датум: 2013-12-27

## ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научног већа Факултета техничких наука у Новом Саду, на 18. редовној седници одржаној дана 26.12.2013. године, донело је следећу одлуку:

*-непотребно изостављено-*

### **Тачка 11.1. Верификација нових техничких решења и именовање рецензената**

Тачка 11.1.11.: У циљу верификације новог техничког решења усвајају се рецензенти:

- Др Милош Главоњић, редовни професор, Машински факултет, Београд
- Др Србољуб Симић, редовни професор, ФТН, Нови Сад

Назив техничког решења:

### **ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА**

Аутори техничког решења: др Александар Живковић, доцент; др Милан Зељковић, редовни професор; др Слободан Табаковић, ванредни професор

*-непотребно изостављено-*

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:  
Секретар

Иван Нешковић, дипл. правник



Проф. др Раде Дорословачки

Одлуком Наставног научног већа Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду, од 26.12.2013. године, именовани смо за рецензенте Техничког решења под називом „ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА“, реализованог у оквиру пројекта „САВРЕМЕНИ ПРИЛАЗИ У РАЗВОЈУ СПЕЦИЈАЛНИХ РЕШЕЊА УЛЕЖИШТЕЊА У МАШИНСТВУ И МЕДИЦИНСКОЈ ПРОТЕТИЦИ“, ТР-35025, чији су аутори: др Александар Живковић, доцент, др Милан Зељковић, редовни професор и др Слободан Табаковић, ванредни професор. На основу прегледа Елабората овог техничког решења и увида у публиковане радове о њему подносимо следећи

## ИЗВЕШТАЈ

Техничко решење „ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА“, аутора: доцента др Александра Живковића, редовног професора др Милана Зељковића и ванредног професора др Слободана Табаковића, је описано у Елаборату који садржи 47 страница формата А4 написаних фонтом 12 са нормалним проредом. Елаборат садржи шест поглавља у које спада и списак коришћене литературе са 57 литературна наслова. Наслови поглавља су:

1. Увод
2. Научно-стручне подлоге техничког решења
3. Теоријске подлоге за развој програмског решења за анализу понашања кугличних лежаја
4. Опис програмских решења за анализу понашања кугличних лежаја
5. Закључак
6. Литература

Техничко решење припада области софтвера предвиђеног за автоматизовани прорачун и анализу кугличних лежаја за различите услове примене и реализовано је у оквиру пројекта „Савремени прилази у развоју специјалних решења улежиштења у машинству и медицинској протетици“ ТР-35025 из програма технолошког развоја Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Програмско решење за анализу понашања кугличних лежаја се користи на Факултету техничких наука као средство за усавршавање процеса анализе лежаја и у предузећу „ФКЛ“ из Темерина које се бави развојем и израдом лежаја и кардана.

У поглављу **Увод** полази се од значаја котрљајних лежаја у металопрерађивачкој индустрији, те констатује непрекидан развој техничких карактеристика истих. Указује се на чињеницу да је понашање конструкција у експлоатацији условљено понашањем лежаја, те се указује на могућности и подручје примене програмског решења за анализу понашања кугличних лежаја.

Поглавље **Научно-стручне подлоге техничког решења** се указује на одређене математичке моделе за анализу истог. Указује се и на велики утицај конструкционах параметра на пораст температуре, а тиме и на преднапрезање лежаја. На основу најновијих литературних извора се приказују резултати истраживања, где се запажа и увођење гироскопског ефекта, центрифугалних сила и геометријске несавршености. Сем линеарне теорије, указује се и на примену, у најновије време, нелинеарне теорије, при чему се углавном разматра геометријска нелинеарност. Анализирани радови су указали на могућност квантитативне оцене статичког, топлотног и динамичког понашања лежаја/лежајног склопа у зависности од његове намене.

У поглављу **Теоријске подлоге за развој програмског решења за анализу понашања кугличних лежаја** су дефинисани математички модели за анализу статичког, динамичког, топлотног понашања лежаја, као и математички модел за одређивање века истог. Математички модел за анализу статичког, кугличних лежаја је развијен на бази *Hertz-ове*

теорије контакта и *John-Haris-ових* квази-статичких једначина равнотеже. Приказани математички модел за анализу динамичког понашања је у основи развијен на бази статичког модела применом Лагранжових једначина. Топлотни модел је базиран на статичком моделу, законима термодинамике и простирања топлоте. Математички модел за одређивање века је такође развијен на основама статичког модела и Ludenberg-Palmgren-ове теорије. Развијени модел је са пет степени слободе и узима у разматрање дејство центрифугалних сила и гироскопског момента, температурне дилатације, преклоп/зазор и таласастост стаза котрљања.

У поглављу *Опис програмских решења за анализу понашања кугличних лежаја* је описана општа структура и реализација програмског решења. Структура програмског решења је описана парцијално кроз опис и начин функционисања сваког решења засебно. Програмско решење се састоји из четири дела која су међусобно повезана, а служе за анализу статичког, динамичког, топлотног понашања и одређивање века кугличних лежаја.

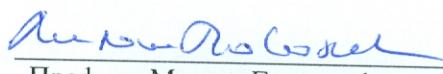
У *закључку* се на основу представљених чињеница сумирају могућности развијеног програмског решења у истраживачким и активностима анализе понашања кугличних лежаја.

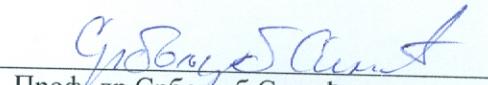
**Прилози** садрже приказ поједињих резултата анализе на конкретним лежајима. Прва група су прецизни лежаји са углом контакта у области  $10^0 - 30^0$  (лежаји за главна вретена) са врло широким опсегом бројева обртаја и комбинованих спољашњих оптерећења. Друга разматрана група су специјални лежаји са косим додиром са углом контакта у области  $30^0 - 60^0$  (улежиштење точка возила и лежаји за компресоре камиона) са изразитим динамичким спољашњим комбинованим оптерећењем.

## МИШЉЕЊЕ

Аутори техничког решења „ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА“ су елаборатом детаљно описали методологију анализе понашања кугличних лежаја. Карактеристике и структура програмског решења указују да ово техничко решење представља допринос у подручју анализе и прорачуна кугличних лежаја. Предлајемо Наставно научном већу Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду, да софтвер „ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА“ (М-85) прихвати као ново техничко решење.

У Београду и Новом Саду, јануар 2014. год.

  
Проф. др Милош Главоњић,  
Машински факултет, Београд

  
Проф. др Србољуб Симић,  
Факултет техничких наука, Нови Сад



Наш број: 01.сл

Ваш број:

Датум: 2014-01-16

## ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научног већа Факултета техничких наука у Новом Саду, на 19. седници одржаној дана 15.01.2014. године, донело је следећу одлуку:

*-непотребно изостављено-*

### Тачка 3. Верификација техничких решења

**Тачка 3.7:** На основу позитивног извештаја рецензената верификује се техничко решења категорије под називом:

### ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ ЗА АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА КУГЛИЧНИХ ЛЕЖАЈА

Аутори техничког решења: др Александар Живковић, доцент; др Милан Зельковић, редовни професор; др Слободан Табаковић, ванредни професор

*-непотребно изостављено-*

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:

Секретар

Иван Нешковић, дипл. правник

