

TEHNIČKO REŠENJE

Metoda za modelovanje ponašanja idealnog memristora

M-85: Prototip, nova metoda, softver, standardizovan ili atestiran instrument, nova genetska proba, mikroorganizmi

Autori:

dr Anamarija Juhas, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

dr Staniša Dautović, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Godina:

2017.

Podtip tehničkog rešenja:

Nova metoda - M85

Korisnik:

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, za potrebe daljih istraživanja

Projekat u okviru koga je realizovano tehničko rešenje:

Broj projekta: TR 32016 Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije

Program istraživanja u oblasti tehnološkog razvoja za period 2011-2017.

Tehnološka oblast: Elektronika, telekomunikacije i informacione tehnologije

Naziv projekta: Inovativne elektronske komponente i sistemi bazirani na neorganskim i organskim tehnologijama ugrađeni u robe i proizvode široke potrošnje

Rukovodilac projekta: dr Ljiljana Živanov, redovni profesor

Kako su rezultati verifikovani (od strane kog tela):

Verifikacija tehničkog rešenja je izvršena od strane:

Naučno-nastavnog veća Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

1. Opis problema koji se rešava tehničkim rešenjem

Oblast na koju se tehničko rešenje odnosi

Teorija signala i sistema, teorija električnih kola, idealan memristor, uštinuta histerezična petlja

Problem koji se tehničkim rešenjem rešava

Modelovanje idealnog memristora ima veliki značaj u analizi električnih kola sa memristorima, kao i za analizu njegovih osobina i mogućnosti primena, bez utroška sredstava za fizičku realizaciju i testiranje memristora. Ne postoji univerzalni model koji bi opisao ponašanje svih realizovanih memristora, jer su za njihovu realizaciju korišćeni različiti fizički fenomeni.

U ovom tehničkom rešenju predložen je makroskopski model idealnog memristora. Predložen model je opšti i jednostavan za primenu. Model je baziran na linearnoj kombinaciji dvosegmentnih deo po deo linearnih karakteristika u $\varphi-q$ ravni. U modelu, memristansa (memduktansa) je deo po deo konstantna funkcija naelektrisanja (fluksa). Kvalitet aproksimacije raste sa brojem elementarnih karakteristika koje formiraju linearnu kombinaciju. U predloženom modelu nije prisutan tzv. problem krajnjeg stanja, koji postoji u mnogim modelima (problem da kada memristor dostigne jednu od saturacija, on u tom stanju trajno ostaje).

Primenom modela opisanog u ovom tehničkom rešenju, jednostavno je odrediti izlaznu veličinu (napon ili struju) za proizvoljan vremenski oblik ulazne veličine (struje ili napona), kao i površinu uštinite histerezične petlje na proizvoljnu periodičnu neparno-simetričnu pobudu.

2. Stanje rešenosti tog problema u svetu

Leon Chua je postulirao postojanje memristora 1971. godine [1]. Uopštenje teorije se pojavilo 1976. godine kada su Chua i Kang definisali memristivne sisteme [2]. U radu [3], kao elementi sa memorijom su osim memristora uvedena i dva nova elementa: mem-kondenzator i mem-kalem.

Vest da je u HP laboratoriji realizovan prvi memristor [4] pobudila je veliko interesovanje među naučnicima i u elektronskoj industriji. Razlog tome leži u atraktivnim osobinama kao što su male dimenzije, mala potrošnja, velika brzina, mogućnost binarnog ili višebitnog zapisa, itd. Zbog ovih osobina predviđa se široka primena memristora za izradu memorija, rekonfigurabilnih logičkih kola, itd.

Trenutno se u svetu sprovode brojna eksperimentalna istraživanja u cilju poboljšanja karakteristika memristora. Do pojave standardne tehnologije izrade, makroskopski modeli imaju velik značaj za proučavanje ulazno-izlazne dinamike memristora, kao i električnih kola sa memristorima.

Počev od 2008. godine kada je fabrikovan prvi memristor [4] (u daljem tekstu HP memristor), intenzivno se radi na formiranju modela memristora. Za sada ne postoji univerzalni model koji bi opisao ponašanje svih realizovanih memristora. Težina problema formulisanja univerzalnog modela potiče od različitih fizičkih fenomena koji su korišćeni u do sada realizovanim memristorima.

Prvi model HP memristora, tzv. linearan drift model, predstavljen je u [4]. U ovom modelu, nakon što memristor dostigne jedno ili drugo krajnje stanje (saturaciju), on u tom stanju trajno ostaje. Pokušaji da se prevaziđe ovaj problem "krajnjeg stanja" (eng. terminal state problem) doveli su do uvođenja tzv. prozorskih funkcija (eng. window functions), od kojih su najpoznatije predložene u [5], [6], [7]. Prozorske funkcije modifikuju diferencijalnu jednačinu promenljive stanja, i samim tim modifikuju i promenljivu stanja memristora. Iako uvođenje prozorskih funkcija nije rešilo problem krajnjeg stanja, one su i danas aktuelne npr. [8].

Simmons tunnelling barrier model [9], [10] baziran je na Simmons-ovoj teoriji tunelovanja predstavljenoj u [11], [12]. Jakopcic model [13] opisuje eksponencijalni drift i koristi funkciju sinus hiperbolični za iskazivanje zavisnosti napona i struje, što predstavlja pojednostavljenje modela baziranog na teoriji tunelovanja. U radu [14] je korišćen proizvod dve eksponencijalne funkcije za modelovanje nelinearnog dopant drifta. TEAM model [15] predstavlja dalje pojednostavljenje modela baziranog na teoriji tunelovanja. U ovom modelu urađena je aproksimacija eksponencijalnog drifta.

U radu [16] je predložen model naponom kontrolisanog memristora, u kojem memristansa linearno raste sa porastom fluksa. U radovima [17], [18] Kang i saradnici predstavili su modularan model memristora implementiran u Simulink-u. Makromodel baziran na Volterra redovima predložen je u [19].

Veliku grupu modela memristora čine modeli implementirani u SPICE-u, npr. [20]-[27]. U radu [27] iz 2016. godine je predložen SPICE model koji ima mogućnost da reprodukuje važne karakteristike memristora, kao što su višebitni zapis, zavisnost od temperature, pa čak i degradaciju parametara sa vremenom. U tom radu je dat i pregled ostalih modela memristora implementiranih u SPICE-u.

U velikom broju slučajeva, memristori i memristivni sistemi se proučavaju korišćenjem numeričkih simulacija. Numeričke simulacije su fleksibilne i raznovrsne, međutim one ponekad ne ukazuju na dominantne faktore koji utiču na ponašanje memristora [28]. Razlog rasprostranjene upotrebe numeričkih simulacija u analiziranju memristora leži i u tome što postoji samo mali broj modela koji se mogu rešiti u zatvorenoj formi. Matematički modeli za opisivanje memristora koji se mogu rešiti u zatvorenoj formi su Bernoulli dynamics [29], [30] i deo onih koji pripadaju Abel dynamics [28]. Ovi modeli su bazirani na istoimenim običnim diferencijalnim jednačinama. Međutim, navedeni matematički modeli obuhvataju samo određene podklase memristora, i samim tim ovi modeli ne mogu opisati sve memristore. U radu [31] u modelovanje memristora je uključena i Riccati-jeva diferencijalna jednačina. U istom radu je izveden i opšti oblik diferencijalne jednačine za opisivanje idealnih memristora. Ovo proširenje je uključilo neke diferencijalne jednačine koje imaju rešenje u zatvorenom obliku, ali i one koje se ne mogu rešiti u zatvorenom obliku. U svim navedenim tipovima diferencijalnih jednačina pojavljuju se samo trenutne vrednosti napona, struje i njihovih izvoda.

U [32]-[34] korišćena je trosegmentna deo po deo linearna karakteristika memristora u $\varphi - q$ ravni i primenjena za modelovanje dvobitne memorije. Trosegmentna karakteristika uzima u obzir prag (eng. threshold), koji je primećen u nekim do sada realizovanim memristorima.

Osobine uštinute histerezisne petlje (eng. pinched hysteresis loop) memristora i ostalih mem-elemenata se intenzivno istražuju, npr. [35]-[49]. Od velikog je interesa i određivanje površine uštinute histerezisne petlje, jer ona predstavlja meru za memorijski efekat memristora pri datim radnim uslovima [36], [44].

Modelovanje i simulacija memristora su neophodni da bi se analizirale osobine memristora i mogućnosti njegove primene, bez utroška sredstava za njegovo fabrikovanje i testiranje. Istraživanja potencijalnih primena memristora obuhvataju memorije, digitalna kola, analogna kola, senzore, neuralne mreže, itd. (npr. [50]). U modelovanje memristora različitim alatima za dizajn VLSI kola uključeni su brojni nelinearni efekti, ali u Matlab-u je do sada realizovan samo linearan model memristora [50].

3. Detaljan opis tehničkog rešenja (uključujući i prateće ilustracije i tehničke crteže)

Idealan memristor je četvrti osnovni pasivni element u teoriji električnih kola (pored otpornika, kalema i kondenzatora). Idealan memristor je vremenski nepromenljiv jednopristupni element, čija je konstitutivna relacija opisana nelinearnom vezom između naelektrisanja q i fluksa φ . Kada se pobuda ukloni, memristor čuva poslednju vrednost otpornosti, sve dok se pobuda ponovo ne uključi. Zbog ove osobine memristor je dobio ime kombinacijom delova engleskih reči memory i resistor.

Pored teorijskog i eksperimentalnog aspekta, za simulaciju i dizajn električnih kola potrebni su modeli memristora koji će opisati njihove dinamičke karakteristike.

3.1. Osobine i opis idealnog memristora

3.1.1. Osnovne osobine idealnog memristora

Konstitutivna relacija idealnog memristora [1], [33] je relacija definisana u $\varphi - q$ ravni,

$$F(\varphi, q) = 0, \quad (1)$$

gde su

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt, \quad q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t i(t)dt. \quad (2)$$

U prethodnom izrazu φ_0 i q_0 su početne vrednosti fluksa i naelektrisanja, respektivno, u trenutku $t = t_0$. U daljem tekstu ćemo ravnopravno koristiti termine „konstitutivna relacija“ i „karakteristika“ kao sinonime.

Memristor je idealan ako je njegova karakteristika u $\varphi - q$ ravni [1]:

1. jedinstvena,
2. nelinearna,
3. kontinualna i
4. monotono rastuća (ova osobina obezbeđuje pasivnost).

S obzirom da je karakteristika memristora u $\varphi - q$ ravni nelinearna monotono rastuća funkcija, konstitutivnu relaciju memristora u implicitnoj formi (1) je moguće iskazati u dva ekvivalentna oblika u eksplicitnoj formi: $\varphi = f(q)$ i $q = f^{-1}(\varphi) = g(\varphi)$. Za memristor se kaže da je kontrolisan naelektrisanjem ako je njegova konstitutivna relacija iskazana u obliku $\varphi = f(q)$. Slično, za memristor se kaže da je kontrolisan fluksom ako je njegova konstitutivna relacija iskazana u obliku $q = g(\varphi)$. S obzirom na karakteristiku memristora u $\varphi - q$ ravni, svaki idealan memristor se može predstaviti kao memristor kontrolisan naelektrisanjem, ali i kao memristor kontrolisan fluksom. Takođe, idealan memristor ima jedinstven opis u $\varphi - q$ ravni, bez obzira da li je pobuda strujna ili naponska [51].

Važno je napomenuti da karakteristika memristora u $i - v$ ravni zavisi od toga da li je pobuda strujna ili naponska, kao i od vremenskog oblika pobude. Zbog toga merenje samo $i - v$ karakteristika ne može da se koristi za modelovanje memristora. Napomenimo i to da za memristore važi da svakoj vrednosti struje (napona) odgovaraju najviše dve vrednosti napona (struje) [1].

Relacija koja povezuje napon i struju memristora glasi

$$v = Mi, \quad (3)$$

gde M označava memristansu memristora, $M = d\varphi/dq > 0$. Ekvivalentno, veza između struje i napona može se iskazati kao

$$i = Wv, \quad (4)$$

gde W označava memduktansu memristora, $W = dq/d\varphi = 1/M > 0$. Iz relacija (3) i (4) je očigledno da napon i struja na memristoru moraju biti istovremeno jednaki nuli.

Iz praktičnih razloga potrebno je da model memristora bude kontrolisan ili strujom ili naponom [17]. Za memristor priključen na strujnu pobudu kaže se da je kontrolisan strujom, dok se za memristor priključen na naponsku pobudu kaže da je kontrolisan naponom.

Iz fizičkih razloga memduktansa je monotono rastuća ili monotono opadajuća funkcija fluksa [18] za naponom kontrolisan memristor. Samim tim, memristansa je monotono rastuća ili monotono opadajuća funkcija naelektrisanja, za strujom kontrolisan memristor.

Tri osnovne osobine (tzv. “fingerprints”) [52] idealnog memristora priključenog na periodičnu neparno-simetričnu pobudu (eng. odd symmetric bipolar waveform) su:

1. uštinuta histerezisna petlja,
2. površina obuhvaćena histerezisnom petljom se smanjuje sa porastom frekvencije pobude,
3. uštinuta histerezisna petlja degeneriše u pravu kada $\omega \rightarrow \infty$. Kad frekvencija teži beskonačnosti, idealan memristor degeneriše u linearan otpornik. Vrednost ove otpornosti određena je početnim stanjem memristora.

3.1.2. Uštinuta histerezisna petlja idealnog memristora

Obluk uštinite histerezisne petlje zavisi od osobina memristora i pobude [51]. Za idealne memristore histerezisna petlja preseca samu sebe [35]. Kada je pobuda periodična i neparno-simetrična, odnosno kada je $i(t+T/2) = -i(t)$, gde je T osnovna perioda, uštinuta histerezisna petlja se sastoji od dve zatvorene krive, koje su simetrične u odnosu na koordinatni početak i nalaze se u prvom i trećem kvadrantu $i - v$ ravni kao u primeru na slici 1. Orijentacije krivih su suprotne. Površine S_1 i S_2 u prvom i trećem kvadrantu respektivno su

$$S_1 = \oint_{G_1} v di, \quad S_2 = \oint_{G_2} v di = -S_1. \quad (5)$$

Relacija (5) ukazuje na to da je ukupna površina uštinute histerezijsne petlje idealnog memristora jednaka nuli, $S_{PHL} = S_1 + S_2 = 0$ [35]. Poznavanje površine histerezijsne petlje je važno jer predstavlja meru za memoriju memristora pri datim radnim uslovima [36], [44].

Površina histerezijsne petlje u prvom kvadrantu za strujom kontrolisan memristor može se odrediti na sledeći način [36]

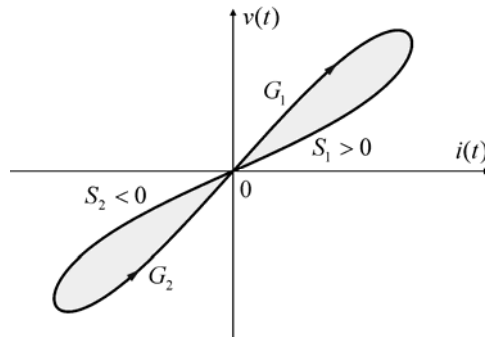
$$S = \int_0^{T/2} v(t) \frac{di(t)}{dt} dt. \quad (6)$$

Dualno, površina histerezijsne petlje u prvom kvadrantu za naponom kontrolisan memristor može se odrediti kao [53]

$$S = \int_0^{T/2} i(t) \frac{dv(t)}{dt} dt. \quad (7)$$

Ako je pobuda pozitivna na intervalu $t \in (0, T/2)$, tada je površina histerezijsne petlje pozitivna ako je smer obilaženja petlje u smeru kazaljke na satu i negativna ako je smer obilaženja suprotan [36], [53].

Kako oblik histerezijsne petlje zavisi od pobude, sledi da pobuda mora biti uključena u određivanje površine. Osim toga, dva ista ulazna signala mogu da proizvedu različite odzive memristora ako su početni uslovi drugačiji. Zbog toga početni uslovi utiču na širinu histerezijsne petlje.



Slika 1. Primer uštinute histerezijsne petlje idealnog memristora.

3.1.3. Normalizovana karakteristika memristora

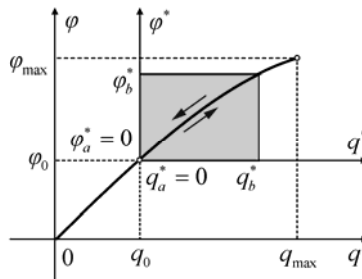
Kad je memristor priključen na izvor, radna tačka se kreće po delu radne karakteristike u $q-\varphi$ ravni kojoj odgovara interval na q -osi koji je označen sa $[q_0, q_b]$. Način na koji je memristor stigao u početnu tačku (q_0, φ_0) je irelevantan za oblik histerezijsne petlje [35]. Zbog toga je moguće koristiti normalizovanu karakteristiku [36]

$$F^*(q^*, \varphi^*) = 0, \quad (8)$$

gde su

$$q^* = q - q_0, \quad \varphi^* = \varphi - \varphi_0. \quad (9)$$

Primer radne karakteristike i normalizovane radne karakteristike prikazan je na slici 2.

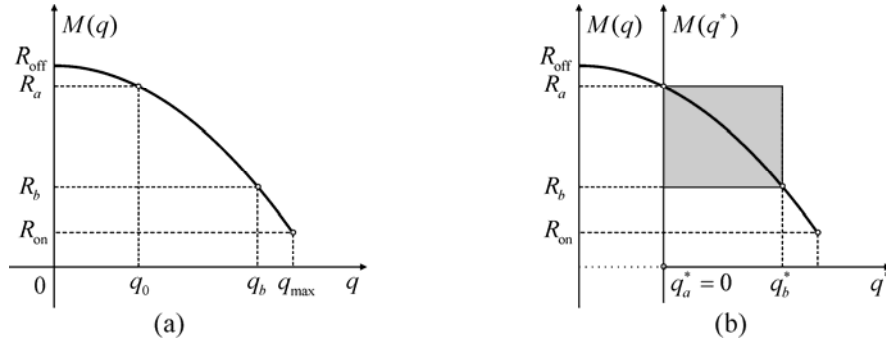


Slika 2. Radna karakteristika i normalizovana radna karakteristika u $q-\varphi$ ravni.

Ekvivalentna reprezentacija memristora je moguća u $q - M$ ravni (eng. memristance-versus-state-map) i ona se može izvesti iz karakteristike u $q - \varphi$ ravni [33]. Primer karakteristike memristora u $q - M$ ravni je prikazan na slici 3a. Za idealan memristor kontrolisan naelektrisanjem memristansa je $M = d\varphi/dq > 0$. Primenom (9), memristansa je takođe jednaka

$$M = \frac{d\varphi^*}{dq^*} > 0. \quad (10)$$

Na osnovu (10), memristor se može opisati i u $q^* - M$ ravni (slika 3b). Vrednosti memristanse koje odgovaraju početnoj $q = q_0$ i krajnjoj $q = q_b$ vrednosti naelektrisanja su označene sa R_a i R_b , respektivno. U normalizovanoj $q^* - M$ ravni ove vrednosti odgovaraju normalizovanim vrednostima naelektrisanja $q^* = q_a^* = 0$ i $q^* = q_b^*$.



Slika 3. Primer (a) radne karakteristike u $q - M$ ravni i (b) odgovarajuće normalizovane radne karakteristike memristora u $q^* - M$ ravni.

3.2. HP memristor - linearan model

Prvi realizovan memristor je HP memristor [4]. Jedan od modela ovog titanijum-dioksid memristora je linearan model. U drugom delu ovog odeljka izvedeni su izrazi za normalizovanu karakteristiku koja odgovara ovom modelu HP memristora.

Za strujom kontrolisan HP memristor veza između napona i struje data je relacijom (npr. [54])

$$v(t) = R(x)i(t) = [R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x(t)]i(t), \quad (11)$$

gde je

$$x(t) = \frac{w(t)}{D} = \frac{\mu_v R_{\text{on}}}{D^2} q(t), \quad 0 \leq x(t) \leq 1. \quad (12)$$

Izraz (12) se može napisati u obliku

$$x(t) = \frac{q(t)}{q_{\text{max,HP}}}, \quad (13)$$

gde je $q_{\text{max,HP}} = D^2/(\mu_v R_{\text{on}})$. Uvrštavanjem (13) u (11) dobija se

$$v(t) = \left[R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q(t)}{q_{\text{max,HP}}} \right] i(t). \quad (14)$$

Iz $0 \leq x(t) \leq 1$ i (13) sledi

$$0 \leq q(t) \leq q_{\text{max,HP}}. \quad (15)$$

Iz (14) memristansa HP memristora jednaka je

$$M(q) = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q}{q_{\text{max,HP}}}. \quad (16)$$

Na osnovu (15) i (16) $R_{\text{on}} \leq M(q) \leq R_{\text{off}}$. Za strujom kontrolisan HP memristor, iz $v = d\varphi/dt$, $i = dq/dt$, $\varphi(q_0) = \varphi_0$ i (14) sledi

$$\varphi(q) = \left[R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q}{2q_{\text{max,HP}}} \right] q. \quad (17)$$

Kao brojni primer iz [54]: za $R_{\text{off}} = 16 \text{ k}\Omega$, $R_{\text{on}} = 100 \Omega$, $D = 10 \text{ nm}$, $\mu_v = 10^{-14} \text{ m}^2/\text{Wb}$ dobija se $q_{\text{max,HP}} = 10^{-4} \text{ C}$ i $\varphi_{\text{max,HP}} = 0,805 \text{ Wb}$, iz čega sledi

$$q \in [0, 10^{-4}] \text{ C}, \quad \varphi \in [0, 0,805] \text{ Wb}. \quad (18)$$

Karakteristika naponom kontrolisanog HP memristora može se odrediti polazeći od (17). Rešavanjem (17) po q (rešenje sa pozitivnim predznakom ispred korena je odbačeno iz fizičkih razloga da bi memduktansa bila pozitivna)

$$q(\varphi) = \frac{2\varphi_{\text{max,HP}}}{R_{\text{off}}^2 - R_{\text{on}}^2} \left[R_{\text{off}} - \sqrt{R_{\text{off}}^2 + (R_{\text{on}}^2 - R_{\text{off}}^2) \frac{\varphi}{\varphi_{\text{max,HP}}}} \right], \quad (19)$$

gde je $\varphi_{\text{max,HP}} = (R_{\text{on}} + R_{\text{off}}) q_{\text{max,HP}}/2$. Memduktansa $W(\varphi) = dq/d\varphi$ je jednaka

$$W(\varphi) = \left[R_{\text{off}}^2 + (R_{\text{on}}^2 - R_{\text{off}}^2) \frac{\varphi}{\varphi_{\text{max,HP}}} \right]^{-1/2}. \quad (20)$$

3.2.1. Normalizovana karakteristika HP-memristora

Karakteristika HP memristora se iz $q - \varphi$ ravni može preslikati u $q^* - \varphi^*$ ravan, na način koji je opisan u [35] (ili odeljak 3.1.3). Uvrštavanjem $q = q^* + q_0$ u (16), memristansa HP memristora dobija oblik

$$M(q) = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q_0 + q^*}{q_{\text{max,HP}}}, \quad (21)$$

Na osnovu (21), za $q^* \in [q_a^*, q_b^*] = [0, q_b^*]$ vrednosti memristanse R_a i R_b u krajnjim tačkama jednake su

$$R_a = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q_0}{q_{\text{max,HP}}}, \quad R_b = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q_0 + q_b^*}{q_{\text{max,HP}}}, \quad (22)$$

odakle se dobija

$$\frac{R_{\text{on}} - R_{\text{off}}}{q_{\text{max,HP}}} = \frac{R_b - R_a}{q_b^*}. \quad (23)$$

Iz (21)-(23) sledi da se memristansa HP memristora može napisati kao

$$M_{\text{HP}}(q^*) = R_a + (R_b - R_a) \frac{q^*}{q_b^*}. \quad (24)$$

Uvrštavanjem $\varphi = \varphi^* + \varphi_0$ i $q = q^* + q_0$ u (17) dobija se

$$\varphi_{\text{HP}}^*(q^*) = \left[R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q^* + q_0}{2q_{\text{max,HP}}} \right] (q^* + q_0) - \varphi_0. \quad (25)$$

Iz (17) i $\varphi_0 = \varphi(q_0)$ sledi $\varphi_0 = R_{\text{off}} q_0 + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) q_0^2 / 2q_{\text{max,HP}}$. Uvrštavanjem u (25) dobija se

$$\varphi_{\text{HP}}^*(q^*) = \left[R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q^* + q_0}{2q_{\text{max,HP}}} \right] q^*. \quad (26)$$

Na osnovu (22), (23) i (26) sledi da se normalizovan fluks HP memristora u funkciji normalizovanog naelektrisanja može napisati u obliku

$$\varphi_{\text{HP}}^*(q^*) = \left[R_a + \frac{1}{2} (R_b - R_a) \frac{q^*}{q_b^*} \right] q^*. \quad (27)$$

Analogno, karakteristika naponom kontrolisanog HP memristora se može napisati u normalizovanom obliku. Uvođenjem oznaka $G_{\text{off}} = 1/R_{\text{off}}$ i $G_{\text{on}} = 1/R_{\text{on}}$, izraz (20) postaje

$$W(\varphi) = \left[\frac{1}{G_{\text{off}}^2} + \left(\frac{1}{G_{\text{on}}^2} - \frac{1}{G_{\text{off}}^2} \right) \frac{\varphi}{\varphi_{\text{max,HP}}} \right]^{-1/2}. \quad (28)$$

Označimo $W(\varphi_0) = G_a$ i $W(\varphi_0 + \varphi_b^*) = G_b$. Iz (28) sledi

$$\frac{1}{G_a^2} = \frac{1}{G_{\text{off}}^2} + \left(\frac{1}{G_{\text{on}}^2} - \frac{1}{G_{\text{off}}^2} \right) \frac{\varphi_0}{\varphi_{\text{max,HP}}}, \quad \frac{1}{G_b^2} = \frac{1}{G_{\text{off}}^2} + \left(\frac{1}{G_{\text{on}}^2} - \frac{1}{G_{\text{off}}^2} \right) \frac{\varphi_0 + \varphi_b^*}{\varphi_{\text{max,HP}}}, \quad (29)$$

odakle je

$$\left(\frac{1}{G_{\text{on}}^2} - \frac{1}{G_{\text{off}}^2} \right) \frac{1}{\varphi_{\text{max,HP}}} = \left(\frac{1}{G_b^2} - \frac{1}{G_a^2} \right) \frac{1}{\varphi_b^*}. \quad (30)$$

Uvrštavanjem $\varphi = \varphi_0 + \varphi^*$, (29) i (30) u (28) sledi da se memduktansa HP memristora može napisati kao

$$W_{\text{HP}}(\varphi^*) = \left[\frac{1}{G_a^2} + \left(\frac{1}{G_b^2} - \frac{1}{G_a^2} \right) \frac{\varphi^*}{\varphi_b^*} \right]^{-1/2}. \quad (31)$$

Analognim postupkom, korišćenjem $q(\varphi_0) = q_0$ i uvođenjem normalizovanog naelektrisanja $q^* = q - q_0$, iz (19) se dobija

$$q_{\text{HP}}^*(\varphi^*) = \frac{2\varphi_b^* G_a^2 G_b^2}{G_a^2 - G_b^2} \left[\frac{1}{G_a} - \sqrt{\frac{1}{G_a^2} + \left(\frac{1}{G_b^2} - \frac{1}{G_a^2} \right) \frac{\varphi^*}{\varphi_b^*}} \right]. \quad (32)$$

3.2.2. Povšina histerezisne petlje HP memristora

U ovom odeljku određene su površine histerezisne petlje strujom kontrolisanog HP memristora za sinusnu pobudu i četiri pobude u vidu povorki impulsa. U izvođenju je korišćena normalizovana karakteristika memristora.

Za sinusnu pobudu $i(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega t)$ je $di(t)/dt = \omega I_{\text{max}} \cos(\omega t)$, $q^* = [1 - \cos(\omega t)] I_{\text{max}} / \omega$ i $q_b^* = 2I_{\text{max}} / \omega$. Iz (24) sledi da se u slučaju sinusne pobude memristansa može napisati kao

$$M_{\text{HP}}(t) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) - \frac{1}{2}(R_b - R_a) \cos(\omega t). \quad (33)$$

Uvrštavanjem $v(t) = M_{\text{HP}}(t) I_{\text{max}} \sin(\omega t)$ i $di(t)/dt = \omega I_{\text{max}} \cos(\omega t)$ u (6) dobija se

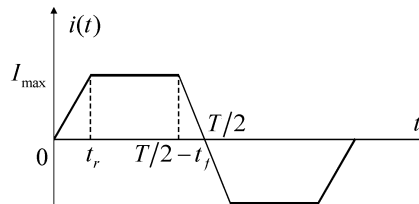
$$S_{\text{HP,sin}} = \frac{1}{2} I_{\text{max}}^2 \left[(R_b + R_a) \int_0^\pi \cos(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) - (R_b - R_a) \int_0^\pi \cos^2(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) \right]. \quad (34)$$

Prvi integral je jednak 0, a drugi $2/3$, iz čega sledi (isti rezultat je izveden u [36])

$$S_{\text{HP,sin}} = \frac{1}{3} (R_a - R_b) I_{\text{max}}^2. \quad (35)$$

Maksimalna površina se dobija kada je $R_a = R_{\text{off}}$ i $R_b = R_{\text{on}}$, i iznosi $\max(S_{\text{HP,sin}}) = (R_{\text{off}} - R_{\text{on}}) I_{\text{max}}^2 / 3$.

Razmotrimo sada površinu histerezisne petlje HP memristora za pobudu u vidu povorka impulsa (eng. periodic bipolar piecewise linear waveform) prikazanu na slici 4. Kao specijalan slučaj ove pobude, može se dobiti povorka pravougaonih impulsa, povorka trougaonih impulsa, kao i povorka testerastih (eng. sawtooth) impulsa.



Slika 4. Pobuda u vidu povorka impulsa, t_r označava vreme porasta, a t_f vreme opadanja na poluperiodi.

U prvoj polovini periode ($0 \leq t \leq T/2$), signal struje u vidu povorke impulsa može se opisati sa

$$i(t) = I_{\max} \begin{cases} t/t_r & \text{ako je } 0 \leq t \leq t_r, \\ 1 & \text{ako je } t_r \leq t \leq T/2 - t_f, \\ (T/2 - t)/t_f & \text{ako je } T/2 - t_f \leq t \leq T/2, \end{cases} \quad (36)$$

gde t_r označava vreme porasta (eng. rise time), a t_f vreme opadanja (eng. fall time). Prvi izvod je

$$\frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} I_{\max}/t_r & \text{ako je } 0 < t < t_r, \\ 0 & \text{ako je } t_r < t < T/2 - t_f, \\ -I_{\max}/t_f & \text{ako je } T/2 - t_f < t < T/2. \end{cases} \quad (37)$$

Normalizovano naelektrisanje ($q^* = q - q_0$) jednako je

$$q^*(t) = \frac{I_{\max}}{2} \begin{cases} t^2/t_r & \text{ako je } 0 \leq t \leq t_r, \\ 2t - t_r & \text{ako je } t_r \leq t \leq T/2 - t_f, \\ T - t_r - t_f - (T/2 - t)^2/t_f & \text{ako je } T/2 - t_f \leq t \leq T/2. \end{cases} \quad (38)$$

Na osnovu (24) memristansa se u funkciji vremena menja kao

$$M_{HP}(t) = R_a + (R_b - R_a) \begin{cases} t^2/[(T - t_r - t_f)t_r] & \text{ako je } 0 \leq t \leq t_r, \\ (2t - t_r)/(T - t_r - t_f) & \text{ako je } t_r \leq t \leq T/2 - t_f, \\ 1 - (T/2 - t)^2/[t_f(T - t_r - t_f)] & \text{ako je } T/2 - t_f \leq t \leq T/2. \end{cases} \quad (39)$$

Uvrštavanjem $v(t) = M_{HP}(t)i(t)$, (36), (37) i (39) u (6), nakon integraljenja dobija se površina histerezisne petlje u prvom kvadrantu za strujnu pobudu u vidu povorke impulsa

$$S_{HP, \text{ramp}} = \frac{1}{2}(R_a - R_b)I_{\max}^2 \left[1 - \frac{t_r + t_f}{2(T - t_r + t_f)} \right]. \quad (40)$$

Protekla količina naelektrisanja u toku pozitivne poluperiode je

$$q_b^* = \frac{1}{2}I_{\max}(T - t_r - t_f). \quad (41)$$

Za povorku pravougaonih impulsa ($t_r = 0$ i $t_f = 0$) dobija se $q_b^* = I_{\max}\pi/\omega$ i

$$S_{HP, \text{sq}} = \frac{1}{2}(R_a - R_b)I_{\max}^2. \quad (42)$$

Za povorku trougaonih impulsa ($t_r = T/4$ i $t_f = T/4$) dobija se $q_b^* = I_{\max}\pi/(2\omega)$ i

$$S_{HP, \Delta} = \frac{1}{4}(R_a - R_b)I_{\max}^2. \quad (43)$$

Za povorku testerastih impulsa ($t_r = T/2$ i $t_f = 0$) dobija se $q_b^* = I_{\max}\pi/(2\omega)$ i $S_{HP, \text{saw}} = S_{HP, \Delta}$.

Pokažimo da se površine histerezisnih petlji $S_{HP, \text{sin}}$, $S_{HP, \text{sq}}$ i $S_{HP, \text{saw}} = S_{HP, \Delta}$ smanjuju (po apsolutnoj vrednosti) sa porastom frekvencije pobude. Iz (23) sledi

$$R_b - R_a = (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q_b^*}{q_{\max, HP}}. \quad (44)$$

S obzirom da $q_b^* = I_{\max}(T - t_r - t_f)/2$ opada sa porastom frekvencije (skraćuje se perioda), sledi da razlika $R_b - R_a$ takođe opada (po apsolutnoj vrednosti) sa porastom frekvencije i samim tim površine $S_{HP, \text{sin}}$, $S_{HP, \text{sq}}$ i $S_{HP, \text{saw}} = S_{HP, \Delta}$ se (po apsolutnoj vrednosti) smanjuju sa porastom frekvencije.

3.3. Idealan memristor sa dvosegmentnom karakteristikom

Dvosegmentna karakteristika idealnog memristora je prikazana na slici 5. Karakteristika je normalizovana u smislu kako je to opisano u odeljku 3.1.3. Lako je uočiti da se za $R_b = R_a$ dobija otpornik. Za idealan memristor je $R_a > 0$, $R_b > 0$ i $R_b \neq R_a$ (može biti $R_b > R_a$, ali i $R_b < R_a$).

Dvosegmentna karakteristika prikazana slici 5(a), na intervalu $q^* \in [0, q_b^*]$ može se opisati sa

$$\varphi^*(q^*) = \begin{cases} R_a q^* & \text{ako je } 0 \leq q^* \leq q_c^*, \\ R_b q^* + (R_a - R_b) q_c^* & \text{ako je } q_c^* \leq q^* \leq q_b^*. \end{cases} \quad (45)$$

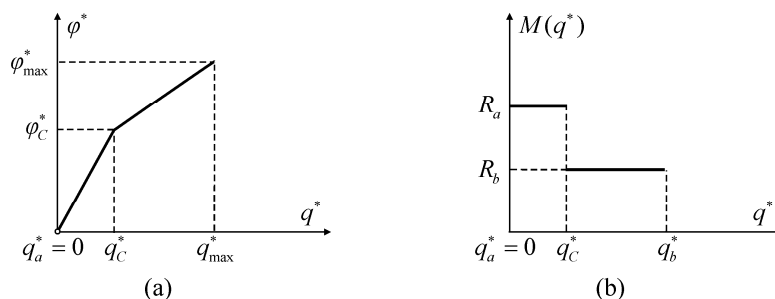
Za memristansu $M(q^*) = d\varphi^*/dq^*$ možemo pisati

$$M(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \text{sgn}(q^* - q_c^*), \quad (46)$$

gde je $\text{sgn}(\cdot)$ označava signum funkciju. Memristansa (46) uzima vrednost R_a za $q^* < q_c^*$ i R_b za $q^* > q_c^*$.

Primititi da se karakteristika (45) može napisati u kompaktnom obliku npr. [55]

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2}(R_b - R_a)[|q^* - q_c^*| - q_c^*]. \quad (47)$$



Slika 5. (a) Dvosegmentna normalizovana karakteristika memristora i (b) memristansa memristora.

S obzirom da je karakteristika (45) monotono rastuća funkcija, ona ima svoju inverznu funkciju

$$q^*(\varphi^*) = \begin{cases} G_a \varphi^* & \text{ako je } 0 \leq \varphi^* \leq \varphi_c^*, \\ G_b \varphi^* + (G_a - G_b) \varphi_c^* & \text{ako je } \varphi_c^* \leq \varphi^* \leq \varphi_b^*, \end{cases} \quad (48)$$

gde je $G_a = 1/R_a$, $G_b = 1/R_b$ i $\varphi_c^* = G_a q_c^*$. Za memduktansu $W(\varphi^*) = dq^*/d\varphi^*$ možemo pisati

$$W(\varphi^*) = \frac{1}{2}(G_b + G_a) + \frac{1}{2}(G_b - G_a) \text{sgn}(\varphi^* - \varphi_c^*). \quad (49)$$

Primititi da se karakteristika (48) može napisati u kompaktnom obliku npr. [55]

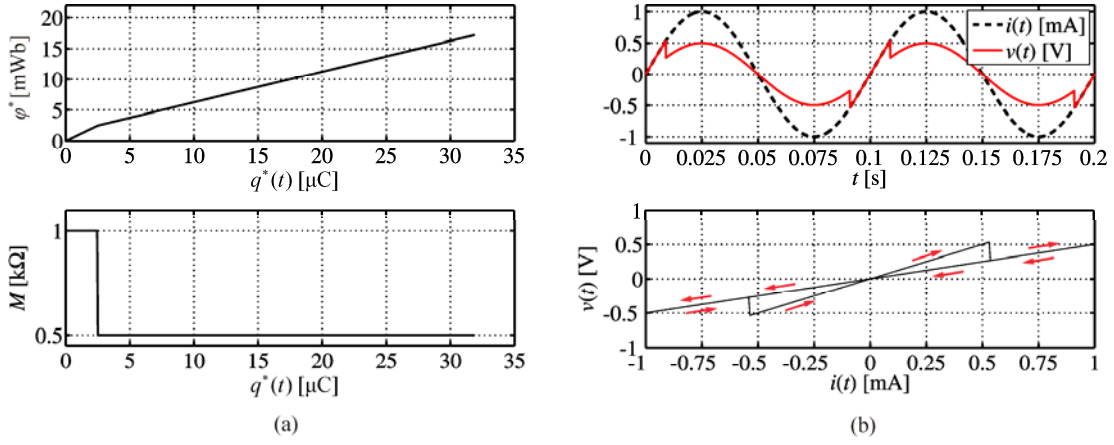
$$q^*(\varphi^*) = \frac{1}{2}(G_b + G_a)\varphi^* + \frac{1}{2}(G_b - G_a)[|\varphi^* - \varphi_c^*| - \varphi_c^*]. \quad (50)$$

3.3.1. Strujom kontrolisan memristor sa dvosegmentnom karakteristikom

Za strujom kontrolisan memristor čija je memristansa data sa (46), napon $v(t) = M(q^*)i(t)$ jednak je

$$v(t) = \begin{cases} R_a i(t) & \text{ako je } q^* < q_c^*, \\ R_b i(t) & \text{ako je } q^* > q_c^*. \end{cases} \quad (51)$$

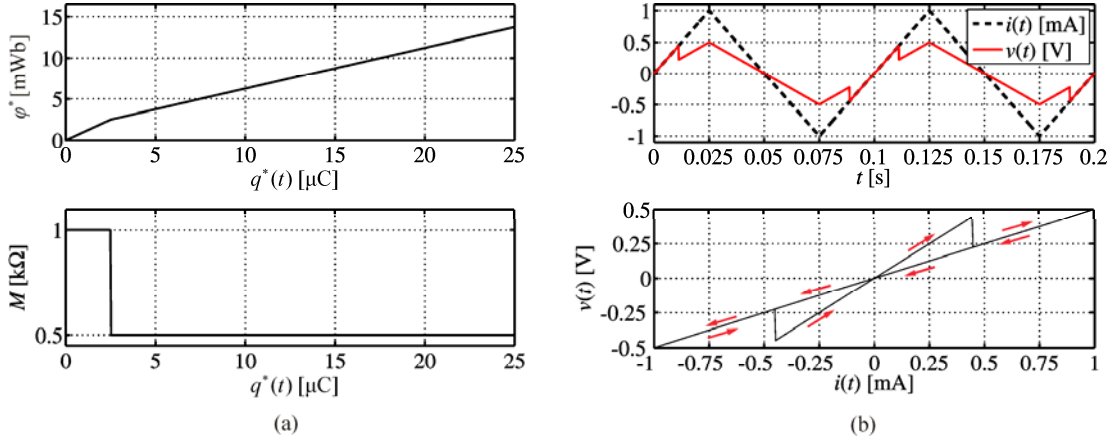
Na slici 6(a) prikazane su zavisnosti $\varphi^*(q^*)$ i $M(q^*)$ za $R_a = 1\text{k}\Omega$, $R_b = 0,5\text{k}\Omega$, $q_c^* = 2,5\mu\text{C}$ i strujnu pobudu $i(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$, $I_{\max} = 1\text{mA}$, $f = 10\text{Hz}$ (brojni primer je iz [36]). Vremenski dijagrami napona $v(t)$, struje $i(t)$, kao i zavisnost $v(i)$ prikazani su na slici 6(b). Zavisnost $v(i)$ ima oblik uštinute histerezisne petlje što je karakteristično za memristore. Rotacija u prvom kvadrantu je u smeru kazaljke na satu jer je $R_a > R_b$.



Slika 6. Memristor sa dvosegmentnom $\varphi^*(q^*)$ karakteristikom: $R_a = 1\text{k}\Omega$, $R_b = 0,5\text{k}\Omega$, $q_C^* = 2,5\mu\text{C}$. Pobuda

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t), \quad I_{\max} = 1\text{mA}, \quad f = 10\text{Hz}. \quad (\text{a}) \quad \varphi^*(q^*) \text{ i } M(q^*), \quad (\text{b}) \quad i(t), \quad v(t) \text{ i } v(i).$$

Kao drugi brojni primer ilustrovan na slikama 7(a) i (b), razmotrimo memristor sa istom karakteristikom ($R_a = 1\text{k}\Omega$, $R_b = 0,5\text{k}\Omega$ i $q_C^* = 2,5\mu\text{C}$), ali sa pobudom u vidu povorke trougaonih impulsa amplitudom $I_{\max} = 1\text{mA}$ i frekvencije $f = 10\text{Hz}$. Povorka trougaonih impulsa sa amplitudom $I_{\max}$ se u kompaktnom obliku može napisati kao $i(t) = (2/\pi)I_{\max} \arcsin[\sin(\omega t)]$. Upoređujući slike 6(b) i 7(b) može se uočiti da su uštinute histerezisne petlje drugačije. To je posledica različitih pobuda u ovim primerima.



Slika 7. Memristor sa dvosegmentnom $\varphi^*(q^*)$ karakteristikom: $R_a = 1\text{k}\Omega$, $R_b = 0,5\text{k}\Omega$, $q_C^* = 2,5\mu\text{C}$. Pobuda

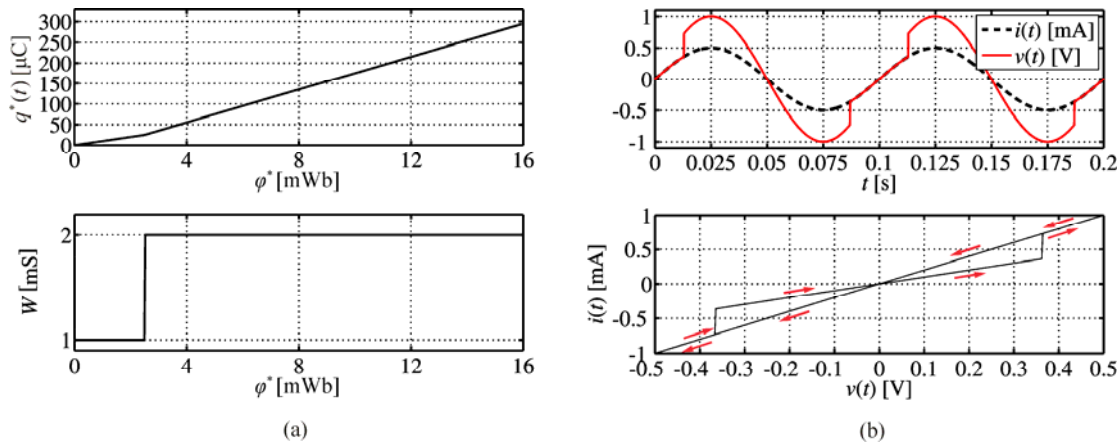
$$i(t) = (2/\pi)I_{\max} \arcsin[\sin(\omega t)], \quad I_{\max} = 1\text{mA}, \quad f = 10\text{Hz}. \quad (\text{a}) \quad \varphi^*(q^*) \text{ i } M(q^*), \quad (\text{b}) \quad i(t), \quad v(t) \text{ i } v(i).$$

3.3.2. Naponom kontrolisan memristor sa dvosegmentnom karakteristikom

Za naponom kontrolisan memristor čija je memduktansa data sa (49), struja $i(t) = W(\varphi^*)v(t)$ jednaka je

$$i(t) = \begin{cases} G_a v(t) & \text{ako je } \varphi^* < \varphi_C^*, \\ G_b v(t) & \text{ako je } \varphi^* > \varphi_C^*. \end{cases} \quad (52)$$

Brojni primer: $G_a = 1\text{mS}$, $G_b = 2\text{mS}$, $\varphi_C^* = 2,5\text{mWb}$ i naponska pobuda $v(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$, $V_{\max} = 0,5\text{V}$, $f = 10\text{Hz}$. Na slici 8(a) prikazane su zavisnosti $q^*(\varphi^*)$ i $W(\varphi^*)$. Vremenski dijagrami napona $v(t)$, struje $i(t)$, kao i zavisnost $i(v)$ prikazani su na slici 8(b). Zavisnost $i(v)$ ima oblik uštinute histerezisne petlje. Rotacija u prvom kvadrantu je u pozitivnom matematičkom smeru jer je $G_a < G_b$.



Slika 8. Memristor sa dvosegmentnom $q^*(\phi^*)$ karakteristikom: $G_a = 1\text{ mS}$, $G_b = 2\text{ mS}$, $\phi_C^* = 2,5\text{ mWb}$. Pobuda $v(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$, $V_{\max} = 0,5\text{ V}$, $f = 10\text{ Hz}$. (a) $q^*(\phi^*)$ i $W(\phi^*)$, (b) $v(t)$, $i(t)$ i $i(v)$.

3.3.3. Površina histerezijske petlje memristora sa dvosegmentnom karakteristikom

U ovom odeljku odredićemo površinu histerezijske petlje za sinusnu pobudu i pobudu u vidu povorke impulsa za memristor sa dvosegmentnom karakteristikom.

Površina uštinute histerezijske petlje strujom kontrolisanog memristora

Površina uštinute histerezijske petlje (u prvom kvadrantu) strujom kontrolisanog memristora za $q^*(T/2) > q_C^*$ može se odrediti polazeći od (6),

$$S = R_a \int_0^{t_C} i(t) \frac{di(t)}{dt} dt + R_b \int_{t_C}^{T/2} i(t) \frac{di(t)}{dt} dt, \quad (53)$$

gde T označava osnovnu periodu, a $t = t_C$ trenutak u kojem je $q^*(t_C) = q_C^*$ (trenutak u kojem memristansa menja vrednost iz R_a u R_b). Kada je $q^*(T/2) > q_C^*$, površina S je pozitivna ako je $R_a > R_b$ (rotacija u smeru kazaljke na satu) i negativna ako je $R_a < R_b$ (rotacija u pozitivnom matematičkom smeru). U drugom slučaju, ako je $q^*(T/2) < q_C^*$ memristor se ponaša kao otpornik otpornosti R_a i površina histerezijske petlje jednaka je nuli.

Kao što smo već napomenuli, površina uštinute histerezijske petlje memristora se određuje za pobudu koja je periodična i neparna funkcija vremena. Iz $i(0) = i(T/2) = 0$ i (53) dobija se

$$S = R_a \int_0^{i(t_C)} idi + R_b \int_{i(t_C)}^0 idi = \frac{1}{2} (R_a - R_b) i^2(t_C). \quad (54)$$

Na osnovu prethodnog sledi da se površina histerezijske petlje u prvom kvadrantu za memristore sa dvosegmentnom karakteristikom može odrediti kao

$$S = \begin{cases} 0 & \text{ako je } q_b^* \leq q_C^*, \\ \frac{1}{2} (R_a - R_b) i^2(t_C) & \text{ako je } q_b^* > q_C^*, \end{cases} \quad (55)$$

gde je $q_b^* = q^*(T/2)$.

Odredimo prvo površinu histerezijske petlje za sinusnu pobudu. Za $i(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$ je $q^* = [1 - \cos(\omega t)] I_{\max} / \omega$ i $q_b^* = 2 I_{\max} / \omega$. Ako je $q_b^* > q_C^*$, iz $q_C^* = [1 - \cos(\omega t_C)] I_{\max} / \omega$ i $i^2(t_C) = I_{\max}^2 \sin^2(\omega t_C) = I_{\max}^2 - I_{\max}^2 \cos^2(\omega t_C)$ sledi $i^2(t_C) = I_{\max}^2 - (I_{\max} - \omega q_C^*)^2$. Uvrštavanjem $i^2(t_C) = I_{\max}^2 - (I_{\max} - \omega q_C^*)^2$ i $q_b^* = 2 I_{\max} / \omega$ u (55) dobija se površina histerezijske petlje (u prvom kvadrantu) za strujom kontrolisani memristor, sa normalizovanom dvosegmentnom karakteristikom, na sinusnu pobudu

$$S_{\sin} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } 2I_{\max}/\omega \leq q_C^*, \\ \frac{1}{2}(R_a - R_b)[I_{\max}^2 - (I_{\max} - \omega q_C^*)^2] & \text{ako je } 2I_{\max}/\omega > q_C^*. \end{cases} \quad (56)$$

Lako je pokazati da je površina $S_{\sin}$ maksimalna za $\omega = I_{\max}/q_C^*$ i da za $\omega > I_{\max}/q_C^*$ opada sa porastom frekvencije. Po apsolutnoj vrednosti maksimalna površina jednaka je $\max |S_{\sin}| = |R_a - R_b| I_{\max}^2 / 2$.

Za brojni primer prikazan ranije na slici 6(b) sa sinusnom pobudom, dobija se $S_{\sin} = 72,37 \mu\text{VA}$, $I_{\max}/q_C^* = 400 \text{ rad/s}$ i $\max(S_{\sin}) = 250 \mu\text{VA}$.

Za pobudu u vidu povorke impulsa iz (36), (38) i (55) dobija se površina histerezisne petlje (u prvom kvadrantu) za strujom kontrolisani memristor, sa normalizovanom dvosegmentnom karakteristikom, na pobudu u vidu povorke impulsa

$$S_{\Pi} = \frac{(R_a - R_b)I_{\max}}{2} \begin{cases} 0 & \text{ako je } \frac{I_{\max}(T - t_r - t_f)}{2} \leq q_C^*, \\ \frac{2q_C^*}{t_r} & \text{ako je } 0 < q_C^* \leq \frac{I_{\max}t_r}{2}, \\ I_{\max} & \text{ako je } \frac{I_{\max}t_r}{2} \leq q_C^* \leq \frac{I_{\max}(T - t_r - 2t_f)}{2}, \\ \frac{I_{\max}(T - t_r - t_f) - 2q_C^*}{t_f} & \text{ako je } \frac{I_{\max}(T - t_r - 2t_f)}{2} \leq q_C^* < \frac{I_{\max}(T - t_r - t_f)}{2}, \end{cases} \quad (57)$$

gde je $q_b^* = I_{\max}(T - t_r - t_f)/2$. Označimo sa $\delta_r = 2t_r/T$ i $\delta_f = 2t_f/T$. Iz $0 \leq t_r + t_f \leq T/2$ sledi $\delta_r \geq 0$, $\delta_f \geq 0$ i $0 \leq \delta_r + \delta_f \leq 1$. Iz $T = 2\pi/\omega$ sledi $t_r = \pi\delta_r/\omega$ i $t_f = \pi\delta_f/\omega$. Uvrštavanjem $T = 2\pi/\omega$, $t_r = \pi\delta_r/\omega$ i $t_f = \pi\delta_f/\omega$ u (57) dobija se

$$S_{\Pi} = \frac{(R_a - R_b)I_{\max}}{2\pi} \begin{cases} 0 & \text{ako je } \frac{I_{\max}\pi(2 - \delta_r - \delta_f)}{2\omega} \leq q_C^*, \\ \frac{2q_C^*\omega}{\delta_r} & \text{ako je } 0 < q_C^* \leq \frac{I_{\max}\pi\delta_r}{2\omega}, \\ \pi I_{\max} & \text{ako je } \frac{I_{\max}\pi\delta_r}{2\omega} \leq q_C^* \leq \frac{I_{\max}\pi(2 - \delta_r - 2\delta_f)}{2\omega}, \\ \frac{I_{\max}\pi(2 - \delta_r - \delta_f) - 2\omega q_C^*}{\delta_f} & \text{ako je } \frac{I_{\max}\pi(2 - \delta_r - 2\delta_f)}{2\omega} \leq q_C^* < \frac{I_{\max}\pi(2 - \delta_r - \delta_f)}{2\omega}, \end{cases} \quad (58)$$

gde je $q_b^* = I_{\max}\pi(2 - \delta_r - \delta_f)/(2\omega)$.

Za pobudu u vidu povorke pravougaonih impulsa je $\delta_r = \delta_f = 0$, $q_b^* = I_{\max}\pi/\omega$ i iz (58) se dobija

$$S_{\text{sq}} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } I_{\max}\pi/\omega \leq q_C^*, \\ \frac{1}{2}(R_a - R_b)I_{\max}^2 & \text{ako je } q_C^* < I_{\max}\pi/\omega. \end{cases} \quad (59)$$

Površina $|S_{\text{sq}}|$ opada sa porastom frekvencije do $\omega = I_{\max}\pi/q_C^*$ i jednaka je nuli za $\omega \geq I_{\max}\pi/q_C^*$. To je zbog toga što q_b^* opada sa porastom frekvencije, iz čega sledi da $|R_a - R_b|$ takode opada, a to dalje dovodi do toga da se smanjuje i $|S_{\text{sq}}|$ (za istu amplitudu pobude).

Za pobudu u vidu povorke trougaonih impulsa je $\delta_r = \delta_f = 1/2$, $q_b^* = I_{\max}\pi/(2\omega)$ i iz (58) se dobija

$$S_{\Delta} = \frac{1}{\pi}(R_a - R_b)I_{\max} \begin{cases} 0 & \text{ako je } I_{\max}\pi/(2\omega) \leq q_C^*, \\ 2\omega q_C^* & \text{ako je } 0 < q_C^* \leq I_{\max}\pi/(4\omega), \\ I_{\max}\pi - 2\omega q_C^* & \text{ako je } I_{\max}\pi/(4\omega) \leq q_C^* < I_{\max}\pi/(2\omega). \end{cases} \quad (60)$$

Izraz (60) se može napisati u kompaktnom obliku kao

$$S_{\Delta} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } I_{\max} \pi / (2\omega) \leq q_C^*, \\ \frac{1}{2\pi} (R_a - R_b) I_{\max} [I_{\max} \pi - |4\omega q_C^* - I_{\max} \pi|] & \text{ako je } q_C^* < I_{\max} \pi / (2\omega). \end{cases} \quad (61)$$

Za brojni primer prikazan na slici 7(b) sa trougaonom pobudom dobija se $S_{\Delta} = 50 \mu\text{VA}$, $I_{\max} \pi / (4q_C^*) = 10\pi \text{ rad/s}$ i $\max(S_{\Delta}) = 250 \mu\text{VA}$.

Za povorku testerastih impulsa je $\delta_r = 1$, $\delta_f = 0$, $q_b^* = I_{\max} \pi / (2\omega)$ i iz (58) se dobija

$$S_{\text{saw}} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } I_{\max} \pi / (2\omega) \leq q_C^*, \\ \frac{2}{\pi} (R_a - R_b) I_{\max} q_C^* \omega & \text{ako je } q_C^* < I_{\max} \pi / (2\omega). \end{cases} \quad (62)$$

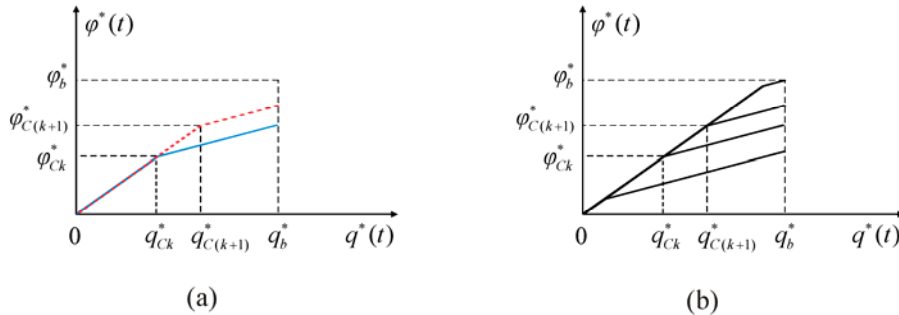
Formalno zamenom $I_{\max} \rightarrow V_{\max}$, $q_C^* \rightarrow \varphi_C^*$, $R_a \rightarrow G_a$ i $R_b \rightarrow G_b$ u izrazima (55), (58)-(62) dobijaju se površine histerezisnih petlji za naponom kontrolisan memristor.

3.4. Aproksimativna karakteristika memristora

U ovom odeljku pokazaćemo da se linearna kombinacija dvosegmentnih karakteristika, formirana sa samo pozitivnim koeficijentima (težinama), može koristiti kao aproksimacija za karakteristiku memristora.

3.4.1. Linearna kombinacija dvosegmentnih karakteristika $\varphi_k^*(q^*)$

Posmatrajmo skup dvosegmentnih karakteristika definisanih za $q^* \in [0, q_b^*]$ i $\varphi^* \in [0, \varphi_b^*]$. Neka je ukupni broj karakteristika jednak $k_{\max}$. Označimo sa q_{Ck}^* mesto gde k -ta karakteristika menja nagib, $k = 1, \dots, k_{\max}$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti $q_{Ck}^* < q_{C(k+1)}^*$, kao što je ilustrovano na slici 9(a). Na slici 9(b) su prikazane prva, k -ta, $(k+1)$ -va i poslednja dvosegmentna karakteristika. Prema definiciji je $q_{C0}^* = 0$ i $q_{C(k_{\max}+1)}^* = q_b^*$. Koeficijent pravca za $0 < q^* < q_{Ck}^*$ je R_a , dok je koeficijent pravca za $q_{Ck}^* < q^* < q_b^*$ jednak R_b . Koeficijenti pravca R_a i R_b su isti za sve karakteristike, ali tačke q_{Ck}^* u kojima karakteristike menjaju nagib se razlikuju.



Slika 9. Dvosegmentne karakteristike (a) k -ta (puna plava linija) i $(k+1)$ -va (isprekidana crvena linija) i (b) prva, k -ta, $(k+1)$ -va i poslednja.

Formirajmo linearnu kombinaciju dvosegmentnih karakteristika

$$\varphi^*(q^*) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k \varphi_k^*(q^*), \quad (63)$$

gde je

$$\lambda_k > 0, \quad k = 1, \dots, k_{\max}, \quad (64)$$

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k = 1. \quad (65)$$

U izrazu (63), $\varphi_k^*(q^*)$ označava k -tu dvosegmentnu karakteristiku koja je monotona rastuća funkcija i menja nagib u q_{Ck}^* . S obzirom da je elementarna dvosegmentna karakteristika jedinstvena, nelinearna, kontinualna i monotono rastuća, sledi da i linearna kombinacija (63), za poznate koeficijente koji ispunjavaju uslove (64)-(65), opisuje karakteristiku koja je jedinstvena, nelinearna, kontinualna i monotono rastuća. Zbog toga, izrazi (63)-(65) mogu da modeluju karakteristiku idealnog memristora u $\varphi^* - q^*$ ravni.

Linearna kombinacija (63) se može protumačiti kao redna veza “elementarnih memristora” sa dvosegmentnim karakteristikama $\lambda_k \varphi_k^*(q^*)$, jer je $\lambda_k > 0$. Kako je jednopristupna mreža sastavljena samo od memristora ekvivalentna memristoru [1], sledi da izraz (63) takođe predstavlja karakteristiku memristora.

Uvrštavanjem (47) u (63) dobija se normalizovana karakteristika ekvivalentnog memristora

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k [|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^*]. \quad (66)$$

Polazeći od (46), za ekvivalentnu memristansu se dobija

$$M(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k \operatorname{sgn}(q^* - q_{Ck}^*). \quad (67)$$

Površina histerezisne petlje može se izvesti polazeći od izraza (6). Uvrštavanjem (67) u $v = M(q^*)i$ i tako dobijenog izraza u (6) dobija se

$$S = \frac{1}{2}(R_b + R_a) \int_{i(0)}^{i(T/2)} idi + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k \int_0^{T/2} \operatorname{sgn}(q^* - q_{Ck}^*) i(t) \frac{di(t)}{dt} dt. \quad (68)$$

Prvi integral jednak je nuli jer je $i(0) = i(T/2) = 0$. Rešavanje drugog integrala vodi ka

$$S = \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k \left[\int_{i(0)}^{i(t_{Ck})} idi - \int_{i(t_{Ck})}^{i(T/2)} idi \right], \quad (69)$$

gde t_{Ck} označava trenutak za koji je $q^*(t_{Ck}) = q_{Ck}^*$. Iz $i(0) = i(T/2) = 0$ sledi da se površina uštinute histerezisne petlje ekvivalentnog memristora može odrediti kao

$$S_{k_{\max}} = \frac{1}{2}(R_a - R_b) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k i^2(t_{Ck}). \quad (70)$$

Izraz (70) se može napisati i u obliku $S_{k_{\max}} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k S_k$, gde S_k označava površinu histerezisne petlje elementarnog memristora čija karakteristika menja nagib u q_{Ck}^* (videti (55)).

Izraz (66) se može uprostiti za $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$. Kako je $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = q^* - 2q_{Ck}^*$ za $k \leq n$ i $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = -q^*$ za $k > n$, izraz (66) dobija oblik

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k (q^* - 2q_{Ck}^*) - q^* \sum_{k=n+1}^{k_{\max}} \lambda_k \right]. \quad (71)$$

Iz (65) sledi $\sum_{k=n+1}^{k_{\max}} \lambda_k = 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Uvrštavanjem u (71) za $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, dobija se

$$\varphi^*(q^*) = R_a q^* + (R_b - R_a) \sum_{k=1}^n \lambda_k (q^* - q_{Ck}^*). \quad (72)$$

Za $q^* \in (q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*)$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, analognim postupkom može se uprostiti izraz (67) za memristansu,

$$M_n = R_a + (R_b - R_a) \sum_{k=1}^n \lambda_k. \quad (73)$$

U $M - q^*$ ravni postoji ukupno $(k_{\max} + 1)$ intervala na kojima je memristansa konstantna. Za $n = 0$ se dobija $q^* \in (0, q_{C1}^*)$ i $M_0 = R_a$, dok se za $n = k_{\max}$ dobija $q^* \in (q_{Ck_{\max}}^*, q_b^*)$ i $M_{k_{\max}} = R_b$, jer je $\sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k = 1$.

Koeficijenti λ_n se mogu odrediti ako su poznati $M_0 = R_a$, $M_{k_{\max}} = R_b$, i vrednosti memristansi M_n za bar po jednu tačku iz svakog intervala $(q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*)$, $n = 1, \dots, k_{\max} - 1$, na sledeći način. Za poznate vrednosti M_n , $n = 0, \dots, k_{\max}$, iz (73) sledi $M_n - M_{n-1} = (R_b - R_a)\lambda_n$, odakle je

$$\lambda_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{R_b - R_a}, \quad n = 1, \dots, k_{\max}. \quad (74)$$

Kao što smo ranije već naveli, iz fizičkih razloga, memristansa je monotono rastuća ili monotono opadajuća funkcija naelektrisanja, za strujom kontrolisani memristor. Ako je memristansa monotono rastuća funkcija, tada je $R_a < R_b$ i $M_{n-1} < M_n$. Dualno, ako je memristansa monotono opadajuća funkcija tada je $R_a > R_b$ i $M_{n-1} > M_n$. U oba slučaja je $\lambda_n > 0$.

3.4.2. Linearna kombinacija dvosegmentnih karakteristika $q_k^*(\varphi^*)$

Analogno se može izvesti karakteristika u slučaju naponom kontrolisanog memristora.

Posmatrajmo skup dvosegmentnih karakteristika definisanih za $\varphi^* \in [0, \varphi_b^*]$ i $q^* \in [0, q_b^*]$. Neka je ukupni broj karakteristika jednak $k_{\max}$. Označimo sa φ_{Ck}^* mesto gde k -ta karakteristika menja nagib, $k = 1, \dots, k_{\max}$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti $\varphi_{Ck}^* < \varphi_{C(k+1)}^*$. Prema definiciji je $\varphi_{C0}^* = 0$ i $\varphi_{C(k_{\max}+1)}^* = \varphi_b^*$. Koeficijent pravca za $0 < \varphi^* < \varphi_{Ck}^*$ je G_a , dok je koeficijent pravca za $\varphi_{Ck}^* < \varphi^* < \varphi_{C(k+1)}^*$ jednak G_b . Koeficijenti pravca G_a i G_b su isti za sve karakteristike, ali tačke φ_{Ck}^* u kojima karakteristike menjaju nagib se razlikuju.

Posmatrajmo linearnu kombinaciju dvosegmentnih karakteristika tipa (50),

$$q^*(\varphi^*) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k q_k^*(\varphi^*), \quad (75)$$

gde je

$$\xi_k > 0, \quad k = 1, \dots, k_{\max}, \quad (76)$$

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k = 1. \quad (77)$$

Na osnovu (50) i (75) može se pisati

$$q^*(\varphi^*) = \frac{1}{2}(G_b + G_a)\varphi^* + \frac{1}{2}(G_b - G_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k [|\varphi^* - \varphi_{Ck}^*| - \varphi_{Ck}^*]. \quad (78)$$

Polazeći od (49), za memduktansu ekvivalentnog memristora se dobija

$$W(\varphi^*) = \frac{1}{2}(G_b + G_a) + \frac{1}{2}(G_b - G_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k \operatorname{sgn}(\varphi^* - \varphi_{Ck}^*). \quad (79)$$

Površina uštinute histerezisne petlje može se izvesti polazeći od izraza (7), analogno kao u prethodnom odeljku. Površina uštinute histerezisne petlje (u prvom kvadrantu) ekvivalentnog memristora jednaka je

$$S_{k_{\max}} = \frac{1}{2}(G_a - G_b) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k v^2(t_{Ck}), \quad (80)$$

gde je t_{Ck} trenutak za koji je $\varphi^*(t_{Ck}) = \varphi_{Ck}^*$. Izraz (80) se može napisati i u obliku $S_{k_{\max}} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \xi_k S_k$, gde S_k

označava površinu uštinute histerezisne petlje elementarnog memristora sa dvosegmentnom karakteristikom koja menja nagib u φ_{Ck}^* .

Izraz (78) se može uprostiti za $\varphi^* \in [\varphi_{Cn}^*, \varphi_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$. Kako je $|\varphi^* - \varphi_{Ck}^*| - \varphi_{Ck}^* = \varphi^* - 2\varphi_{Ck}^*$ za $k \leq n$ i $|\varphi^* - \varphi_{Ck}^*| - \varphi_{Ck}^* = -\varphi^*$ za $k > n$, izraz (78) dobija oblik

$$q^*(\varphi^*) = \frac{1}{2}(G_b + G_a)\varphi^* + \frac{1}{2}(G_b - G_a) \left[\sum_{k=1}^n \xi_k (\varphi^* - 2\varphi_{Ck}^*) - \varphi^* \sum_{k=n+1}^{k_{\max}} \xi_k \right]. \quad (81)$$

Iz (77) sledi $\sum_{k=n+1}^{k_{\max}} \xi_k = 1 - \sum_{k=1}^n \xi_k$. Uvrštavanjem u (81) za $\varphi^* \in [\varphi_{Cn}^*, \varphi_{C(n+1)}^*]$, $n=0, \dots, k_{\max}$, dobija se

$$q^*(\varphi^*) = G_a \varphi^* + (G_b - G_a) \sum_{k=1}^n \xi_k (\varphi^* - \varphi_{Ck}^*), \quad (82)$$

Za $\varphi^* \in (\varphi_{Cn}^*, \varphi_{C(n+1)}^*)$, $n=0, \dots, k_{\max}$, analognim postupkom može se uprostiti izraz (79) za memduktansu,

$$W_n = G_a + (G_b - G_a) \sum_{k=1}^n \xi_k. \quad (83)$$

U $W - \varphi^*$ ravni postoji ukupno $(k_{\max} + 1)$ intervala $\varphi^* \in (\varphi_{Cn}^*, \varphi_{C(n+1)}^*)$, $n=0, \dots, k_{\max}$, na kojima je memduktansa konstantna. Za $n=0$ dobija se $\varphi^* \in (0, \varphi_{C1}^*)$ i $W_0 = G_a$, dok se za $n=k_{\max}$ dobija $\varphi^* \in (\varphi_{Ck_{\max}}^*, \varphi_b^*)$ i $W_{k_{\max}} = G_b$.

Koeficijenti ξ_n se mogu odrediti ako su poznati $W_0 = G_a$, $W_{k_{\max}} = G_b$, i vrednosti memduktansi za bar jednu tačku iz svakog intervala $(\varphi_{Cn}^*, \varphi_{C(n+1)}^*)$, $n=1, \dots, k_{\max} - 1$, na sledeći način. Za poznate vrednosti W_n , $n=0, \dots, k_{\max}$, iz (83) sledi $W_n - W_{n-1} = (G_b - G_a) \xi_n$, odakle je

$$\xi_n = \frac{W_n - W_{n-1}}{G_b - G_a}, \quad n=1, \dots, k_{\max}. \quad (84)$$

Ako je memduktansa monotono rastuća funkcija, tada je $G_a < G_b$ i $W_{n-1} < W_n$. Ako je memduktansa monotono opadajuća funkcija tada je $G_a > G_b$ i $W_{n-1} > W_n$. U oba slučaja je $\xi_n > 0$.

3.5. Primeri primene metode za modelovanja memristora

U ovom odeljku izložena su četiri primera modelovanja idealnih memristora. U svim primerima za određivanje modela korišćeni su rezultati prikazani u odeljku 3.4.

3.5.1. Modelovanje strujom kontrolisanog HP memristora

Za strujom kontrolisan HP memristor, fluks i memristansa su funkcije naelektrisanja. Zato su za modelovanje fluksa i memristanse korišćeni izrazi (66) i (67), respektivno.

Pretpostavimo prvo da su tačke u kojima dvosegmentne karakteristike menjaju nagib opisane sa

$$q_{Ck}^* = (2k-1)\Delta q^*, \quad \Delta q^* = \frac{q_b^*}{2k_{\max}}, \quad (85)$$

za $k=1, \dots, k_{\max}$. Podsetimo se da je $q_{C0}^* = 0$ i $q_{C(k_{\max}+1)}^* = q_b^*$. Pretpostavimo dalje da su tačna karakteristika (24) i približna karakteristika (67) jednake za $q^* = 2k\Delta q^*$, $k=0, \dots, k_{\max}$. Na osnovu (24), tačna vrednost memristanse je

$$M_{\text{HP}}(2k\Delta q^*) = R_a + (R_b - R_a) \frac{k}{k_{\max}}, \quad (86)$$

odakle dalje iz pretpostavke o jednakosti tačne i aproksimativne memristanse u tačkama $q^* = 2k\Delta q^*$ sledi

$$M(2k\Delta q^*) = R_a + (R_b - R_a) \frac{k}{k_{\max}}. \quad (87)$$

Kako je po pretpostavci $M(2k\Delta q^*)$ jednako sa M_k (videti (73)), iz (87) i (74) se dobijaju koeficijenti

$$\lambda_k = \frac{1}{k_{\max}}, \quad k=1, \dots, k_{\max}. \quad (88)$$

Uvrštavanjem (88) u (66) i (67) dobijaju se aproksimativne karakteristike

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2k_{\max}}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} [|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^*], \quad (89)$$

$$M(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) + \frac{1}{2k_{\max}}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \text{sgn}(q^* - q_{Ck}^*). \quad (90)$$

Za $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, korišćenjem $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = q^* - 2q_{Ck}^*$ za $n \geq k$, $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = -q^*$ za $n < k$, dobija se da se (89) može napisati u obliku (videti takođe (71))

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2k_{\max}}(R_b - R_a) \left[(2n - 1 - k_{\max})q^* - 2 \sum_{k=1}^n q_{Ck}^* \right]. \quad (91)$$

Uvrštavanjem (85) u (91) i korišćenjem $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$, kao aproksimativan izraz za fluks HP memristora na intervalu $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, dobija se

$$\varphi^*(q^*) = R_a q^* + (R_b - R_a) \frac{n}{k_{\max}} (q^* - n \Delta q^*). \quad (92)$$

Na osnovu (73), aproksimativan izraz za memristansu na intervalu $q^* \in (q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*)$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, glasi

$$M(q^*) = M_n = R_a + (R_b - R_a) \frac{n}{k_{\max}}. \quad (93)$$

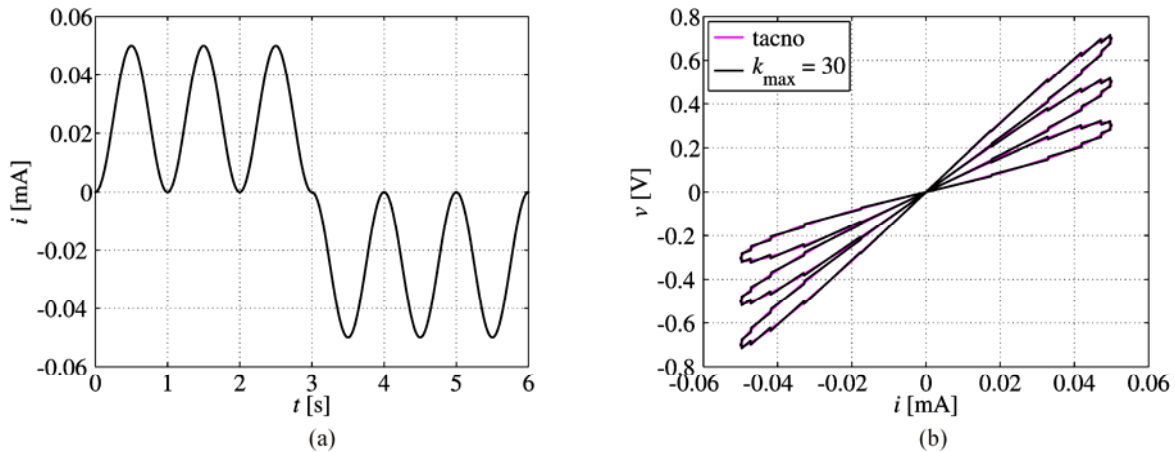
Razlika tačne (24) i aproksimativne (93) vrednosti memristanse, $M_{\text{HP}}(q^*) - M(q^*)$, na intervalu $q^* \in (q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*)$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, jednaka je

$$M_{\text{HP}}(q^*) - M(q^*) = \frac{(R_b - R_a)}{2k_{\max}} \left[\frac{q^*}{\Delta q^*} - 2n \right]. \quad (94)$$

Apsolutna vrednost razlika je najveća u krajnjim tačkama intervala i iznosi $|R_b - R_a|/(2k_{\max})$. Lako se vidi da će aproksimacija biti bolja za veće $k_{\max}$. Isto tako, sledi da se za $k_{\max} \rightarrow \infty$ dobija tačna karakteristika.

Ako se koristi interval $q^* \in (0, q_{\max_HP})$ (koji se može dobiti za $q_0 = 0$ i $q_b^* = q_{\max_HP}$) onda je $R_a = R_{\text{off}}$ i $R_b = R_{\text{on}}$. Na osnovu prethodnog, pristup opisan u ovom tehničkom rešenju omogućava da se osim cele karakteristike, modeluje samo jedan njen deo, ako npr. rezultatima merenja nije obuhvaćena cela karakteristika.

Kao ilustracija primene modela, na slici 10 je prikazan odziv HP memristora na složenu pobudu. Pobuda se može opisati sa $i(t) = I_{\max}(1 - \cos \omega t)$ za $0 \leq t \leq 3s$ i $i(t) = -I_{\max}(1 - \cos \omega t)$ za $3s \leq t \leq 6s$, gde je $I_{\max} = 0,02 \text{ mA}$ i $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$. Ostali brojni podaci su $k_{\max} = 30$, $q_0 = 0$, $R_a = 16 \text{ k}\Omega$, $R_b = 4,075 \text{ k}\Omega$, i $q_b^* = 75 \mu\text{C}$.

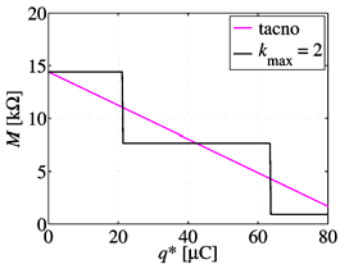
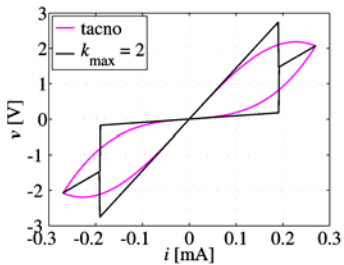
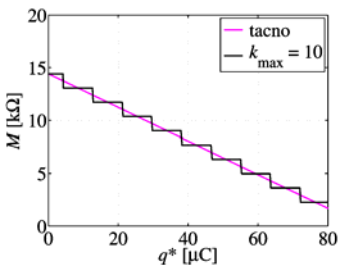
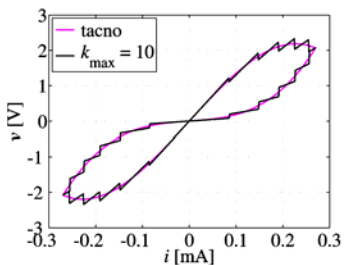
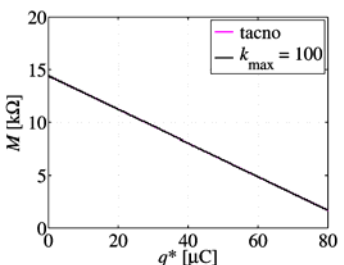
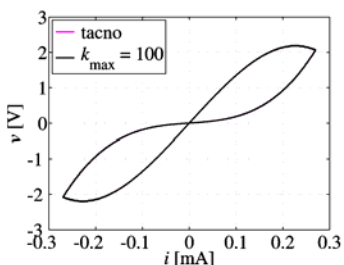


Slika 10. (a) Strujna pobuda i (b) zavisnost napona memristora od struje.

U tabeli 1, prikazani su grafici aproksimativnih $M(q^*)$ karakteristika i uštinutih histerezisnih petlji strujom kontrolisanog HP memristora za $k_{\max} \in \{2, 10, 100\}$. Rezultati dobijeni primenom linearnog modela

(odeljak 3.2) su takođe prikazani na graficima i u legendi označeni kao “tacno”. Pobuda je u vidu povorke trougaonih impulsa amplitude $I_{\max} = 0,27 \text{ mA}$ i kružne frekvencije $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Ostali brojni podaci su $q_0 = 10 \mu\text{C}$, $R_a = 14,41 \text{ k}\Omega$, $R_b = 0,923 \text{ k}\Omega$, i $q_b^* = 78,54 \mu\text{C}$.

Tabela 1. Model memristanse i uštinute histerezisne petlje strujom kontrolisanog HP memristora.

$k_{\max}$	$M(q^*)$	$v(i)$
2		
10		
100		

3.5.2. Model naponom kontrolisanog Jo memristora

U ovom odeljku modelovana je uštinuta histerezisna petlja naponom kontrolisanog memristora (u daljem tekstu Jo memristor) koji je opisan u [16]. Za naponom kontrolisan Jo memristor, memduktansa je funkcija fluksa. Zato je za modelovanje memduktanse korišćen izraz (79).

Memduktansa Jo memristora jednaka je [16]

$$W_{Jo}(\varphi) = \frac{1}{R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{\varphi}{\varphi_{\max_Jo}}}, \quad (95)$$

gde je $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max_Jo}$. Uvrštavanjem $\varphi = \varphi_0 + \varphi^*$ u (95), memristansa se može napisati kao

$$M_{Jo}(\varphi^*) = \frac{1}{W_{Jo}(\varphi^*)} = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{\varphi_0 + \varphi^*}{\varphi_{\max_Jo}}. \quad (96)$$

Na osnovu (96) za $\varphi^* = \varphi_a^* = 0$ i $\varphi^* = \varphi_b^*$ dobija se

$$R_a = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max_Jo}}, \quad R_b = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{\varphi_0 + \varphi_b^*}{\varphi_{\max_Jo}}, \quad (97)$$

odakle je

$$\frac{R_{\text{on}} - R_{\text{off}}}{\varphi_{\text{max_Jo}}} = \frac{R_b - R_a}{\varphi_b^*}. \quad (98)$$

Na osnovu (97)-(98), (96) se može napisati kao $M_{\text{Jo}}(\varphi^*) = R_a + (R_b - R_a)\varphi^*/\varphi_b^*$, odakle je

$$W_{\text{Jo}}(\varphi^*) = \frac{1}{R_a + (R_b - R_a)\frac{\varphi^*}{\varphi_b^*}}, \quad (99)$$

i $0 \leq \varphi^* \leq \varphi_b^*$.

Za formiranje modela, pretpostavimo prvo da su tačke u kojima dvosegmentne karakteristike menjaju nagib definisane sa

$$\varphi_{Ck}^* = (2k-1)\Delta\varphi^*, \quad \Delta\varphi^* = \frac{\varphi_b^*}{2k_{\text{max}}}, \quad (100)$$

za $k=1, \dots, k_{\text{max}}$. Podsetimo se da je $\varphi_{C0}^* = 0$ i $\varphi_{C(k_{\text{max}}+1)}^* = \varphi_b^*$. Pretpostavimo dalje da su tačna (95) i približna (79) memduktansa jednake u tačkama $\varphi^* = 2k\Delta\varphi^*$, $k=0, \dots, k_{\text{max}}$. Iz (95), sledi da je memduktansa u tim tačkama jednaka

$$W_k = W(2k\Delta\varphi^*) = \frac{1}{R_a + (R_b - R_a)\frac{k}{k_{\text{max}}}}. \quad (101)$$

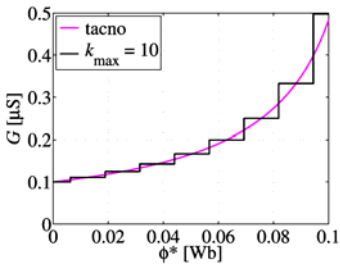
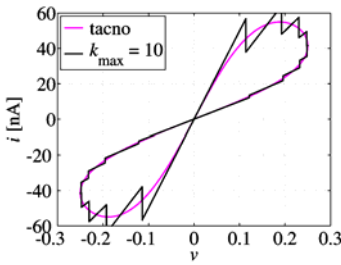
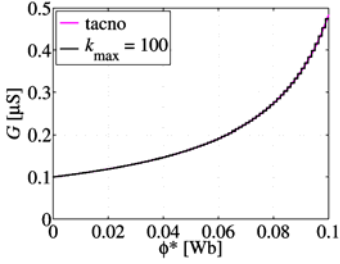
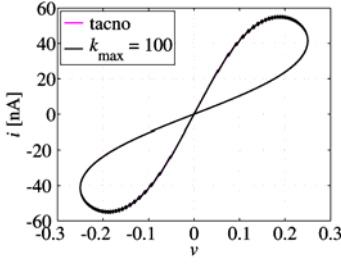
Iz (101), (84), $G_a = 1/R_a$ i $G_b = 1/R_b$, se dobijaju koeficijenti

$$\xi_k = \frac{-k_{\text{max}} R_a R_b}{[R_a k_{\text{max}} + (R_b - R_a)k][R_a k_{\text{max}} + (R_b - R_a)(k-1)]}, \quad k=1, \dots, k_{\text{max}}. \quad (102)$$

Uvrštavanjem (102) u (79), formira se aproksimativan izraz za memduktansu Jo memristora. Za zadatu naponsku pobudu, struja se određuje kao $i(t) = W(\varphi^*)v(t)$.

U tabeli 2, prikazani su grafici aproksimativnih $W(\varphi^*)$ karakteristika i uštinutih histerezisnih petlji naponom kontrolisanog Jo memristora za $k_{\text{max}}=10$ i $k_{\text{max}}=100$. Ostali brojni podaci su $R_a=10\text{M}\Omega$, $R_b=2,11\text{M}\Omega$, $v(t)=V_{\text{max}}\sin(\omega t)$, $V_{\text{max}}=0,25\text{V}$, $\omega=5\text{rad/s}$ i $\varphi_b^*=0,1\text{Wb}$.

Tabela 2. Model memristanse i uštinute histerezisne petlje naponom kontrolisanog Jo memristora.

k_{max}	$W(\varphi^*)$	$i(v)$
10		
100		

3.5.3. Modelovanje memristora sa normalizovanom karakteristikom $\varphi^*(q^*) = q^* + (q^*)^3/3$

U ovom odeljku razmatran je strujom kontrolisan memristor sa normalizovanom karakteristikom

$$\varphi^*(q^*) = q^* + (q^*)^3/3. \quad (103)$$

Karakteristika ovog tipa se često pojavljuje u radovima u kojima se razmatraju modeli memristora npr. [33], [55]. Memristansa je

$$M(q^*) = 1 + (q^*)^2. \quad (104)$$

Iz (104) sledi $R_a = 1$ i $R_b = 1 + (q_b^*)^2$, jer je $q_a^* = 0$ po definiciji i $q^* \in [q_a^*, q_b^*]$.

U cilju formiranja modela, pretpostavimo da su q_{Ck}^* definisane sa (85). Pretpostavimo dalje da su tačna karakteristika (104) i približna karakteristika (73) jednake u tačkama $q^* = 2k\Delta q^*$, $k = 0, \dots, k_{\max}$. U tim tačkama, na osnovu (104), tačna vrednost memristanse je

$$M(2k\Delta q^*) = 1 + (2k\Delta q^*)^2 = 1 + \left(\frac{kq_b^*}{2k_{\max}} \right)^2, \quad (105)$$

jer je $\Delta q^* = q_b^*/(2k_{\max})$. Korišćenjem $R_a = 1$ i $(q_b^*)^2 = R_b - 1 = R_b - R_a$, izraz (105) se može napisati kao

$$M(2k\Delta q^*) = R_a + (R_b - R_a) \frac{k^2}{k_{\max}^2}, \quad (106)$$

Uvrštavanjem $M_k = M(2k\Delta q^*)$ u (74) dobijaju se koeficijenti

$$\lambda_k = \frac{2k-1}{k_{\max}^2}, \quad k = 1, \dots, k_{\max}. \quad (107)$$

Konačno, uvrštavanjem (107) u (66) i (67) dobijaju se aproksimativne karakteristike

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2k_{\max}^2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} (2k-1) [|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^*], \quad (108)$$

$$M(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) + \frac{1}{2k_{\max}^2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} (2k-1) \text{sgn}(q^* - q_{Ck}^*). \quad (109)$$

Za $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, korišćenjem $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = q^* - 2q_{Ck}^*$ za $n \geq k$, $|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^* = -q^*$ za $n < k$, dobija se da se (108) može napisati u obliku (videti takode (71))

$$\varphi^*(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2k_{\max}^2}(R_b - R_a) \left[q^* \sum_{k=1}^n (2k-1) - 2 \sum_{k=1}^n (2k-1)q_{Ck}^* - q^* \sum_{k=n+1}^{k_{\max}} (2k-1) \right]. \quad (110)$$

Uvrštavanjem (85) u (110) i korišćenjem identiteta $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ i $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = (4n^2-1)n/3$ izraz (110)

na intervalu $q^* \in [q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*]$, $n = 0, \dots, k_{\max}$, postaje

$$\varphi^*(q^*) = \left[R_a + (R_b - R_a) \frac{n^2}{k_{\max}^2} \right] q^* - (R_b - R_a) \frac{n(4n^2-1)}{6k_{\max}^3} q_b^*, \quad (111)$$

odnosno

$$\varphi^*(q^*) = \left[1 + \frac{n^2}{k_{\max}^2} (q_b^*)^2 \right] q^* - \frac{n(4n^2-1)}{6k_{\max}^3} (q_b^*)^3. \quad (112)$$

Uvrštavanjem (107) u (73), dobija se aproksimativni izraz za memristansu na intervalu $q^* \in (q_{Cn}^*, q_{C(n+1)}^*)$, $n = 0, \dots, k_{\max}$,

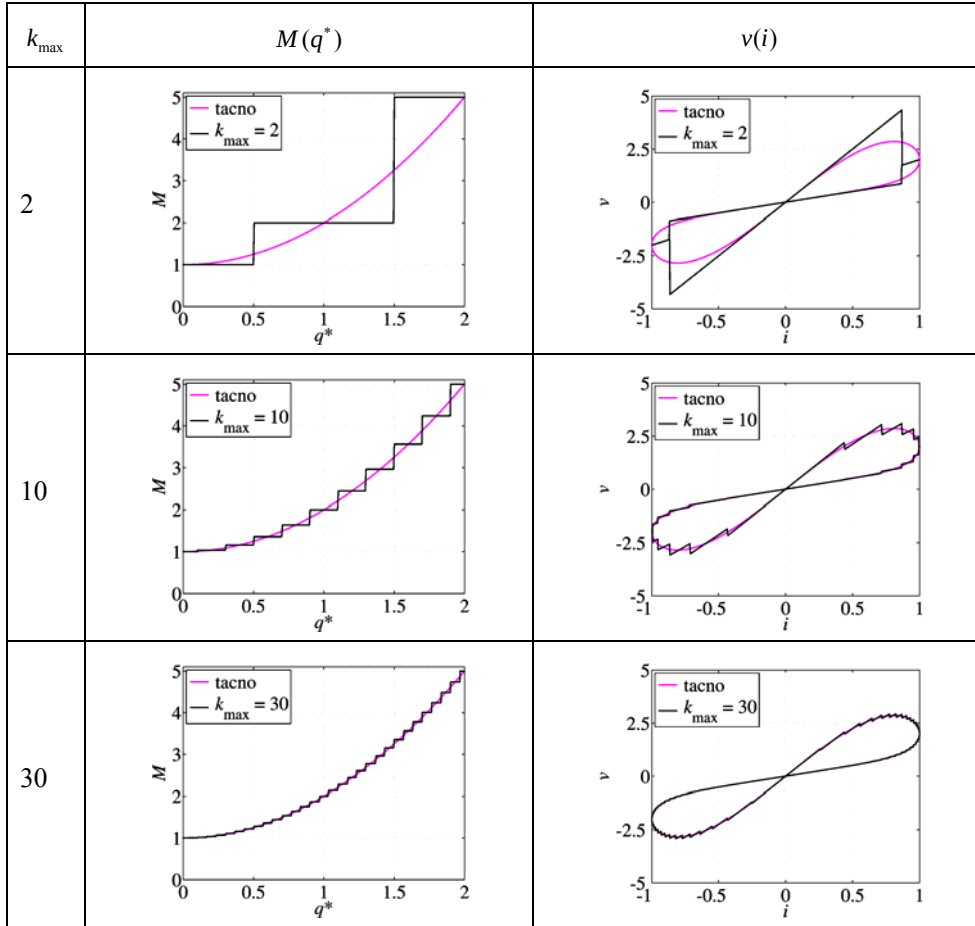
$$M_n = R_a + \frac{1}{k_{\max}^2} (R_b - R_a) \sum_{k=1}^n (2k-1). \quad (113)$$

Korišćenjem identiteta $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$, izraz (113) dobija oblik

$$M_n = R_a + (R_b - R_a) \frac{n^2}{k_{\max}^2} = 1 + \frac{n^2}{k_{\max}^2} (q_b^*)^2. \quad (114)$$

U tabeli 3, prikazane su aproksimativna (109) i tačna karakteristika, kao i aproksimativna i tačna uštinuta histerezisna petlja. Brojni podaci su $k_{\max} \in \{2, 10, 30\}$, $i(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$, $I_{\max} = 1$, $\omega = 1$ i $q_b^* = 2$.

Tabela 3. Primeri modelovanja memristanse i uštinite histerezisne petlje idealnog memristora sa normalizovanom karakteristikom $\varphi^*(q^*) = q^* + (q^*)^3/3$.



Tačna površina histerezisne petlje memristora čija je karakteristika data sa (103) iznosi $S = -4I_{\max}^4/(3\omega^2)$ (npr. može se izračunati korišćenjem izraza (6) iz [41]). Za $I_{\max} = 1$ i $\omega = 1$ dobija se $S = -4/3 \approx -1,33$. Korišćenjem (107), (85) i (70) za $k_{\max} = 1, 2, 5, 10, 30, 50$ dobijaju se površine $S_{k_{\max}=1} = -2$, $S_{k_{\max}=2} = -1,5$, $S_{k_{\max}=5} = -1,36$, $S_{k_{\max}=10} = -1,34$, $S_{k_{\max}=30} = -1,3341$ i $S_{k_{\max}=50} = -1,3336$.

3.5.4. Određivanje aproksimativne karakteristike memristora iz rezultata merenja

Određivanje približnog modela memristora moguće je i na osnovu rezultata merenja. Iz svega iznetog, sledi da tačnost aproksimacije zavisi od broja tačaka u kojima su poznati parovi (q_k, M_k) za strujom kontrolisan memristor ili parovi (φ_k, W_k) za naponom kontrolisan memristor.

U laboratoriji, naelektrisanje i memristansa se ne mogu meriti direktno [56]. Umesto njih se mogu meriti napon i struja [56]. Primenjujući strujnu pobudu (koja je periodična i neparno-simetrična) i merenjem napona mogu se izračunati odgovarajuće vrednosti memristanse. Normalizovano naelektrisanje u trenucima u kojima je poznata memristansa se može analitički odrediti za poznatu pobudu.

Pretpostavimo da su na gore opisan način dobijeni rezultati merenja u vidu parova (q_k^*, M_k) , $k = 0, \dots, k_{\max}$, $q_0^* = 0$, za strujom kontrolisan memristor (analogno se sve može izvesti za naponom kontrolisan memristor). Bez gubitka opštosti može se pretpostaviti da su rezultati sortirani tako da

$q_0^* < q_1^* < \dots < q_{k_{\max}}^*$. Prva tačka (q_0^*, M_0) , odgovara tački (q_a^*, R_a) , dok poslednja tačka $(q_{k_{\max}}^*, M_{k_{\max}})$ odgovara tački (q_b^*, R_b) .

U postupku određivanja karakteristike i uštinute histerezisne petlje idealnog memristora na osnovu izmerenih vrednosti, korišćeni su rezultati izloženi u odeljku 3.4.1. Postupak se može formulisati u pet koraka.

1. Iz rezultata merenja odrediti q_b^* , R_a , R_b i $k_{\max}$.

2. Izračunati λ_k , $k = 1, \dots, k_{\max}$, korišćenjem (74) koji glasi

$$\lambda_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{R_b - R_a}, \quad k = 1, \dots, k_{\max}. \quad (115)$$

3. Označiti sa $q_{C0}^* = q_a^*$, $q_{C(k_{\max}+1)}^* = q_b^*$ i izabrati $q_{Ck}^* \in (q_k^*, q_{k+1}^*)$, $k = 1, \dots, k_{\max}$. Napisati aproksimativnu karakteristiku (66), tj.

$$\varphi(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a)q^* + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k [|q^* - q_{Ck}^*| - q_{Ck}^*]. \quad (116)$$

4. Napisati aproksimativan izraz za memristansu (67), tj.

$$M(q^*) = \frac{1}{2}(R_b + R_a) + \frac{1}{2}(R_b - R_a) \sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k \operatorname{sgn}(q^* - q_{Ck}^*). \quad (117)$$

5. Za crtanje uštinute histerezisne petlje, za zadatu pobudu $i(t)$ izračunati $q^*(t)$ iz

$$q^*(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau, \quad (118)$$

gde t_0 označava početni trenutak od kog deluje pobuda i $i(t_0) = 0$. Integral se može rešiti analitički ili numerički. Iz $q^*(t)$ i (117) odrediti memristansu i izračunati napon $v(t) = M(q^*) i(t)$.

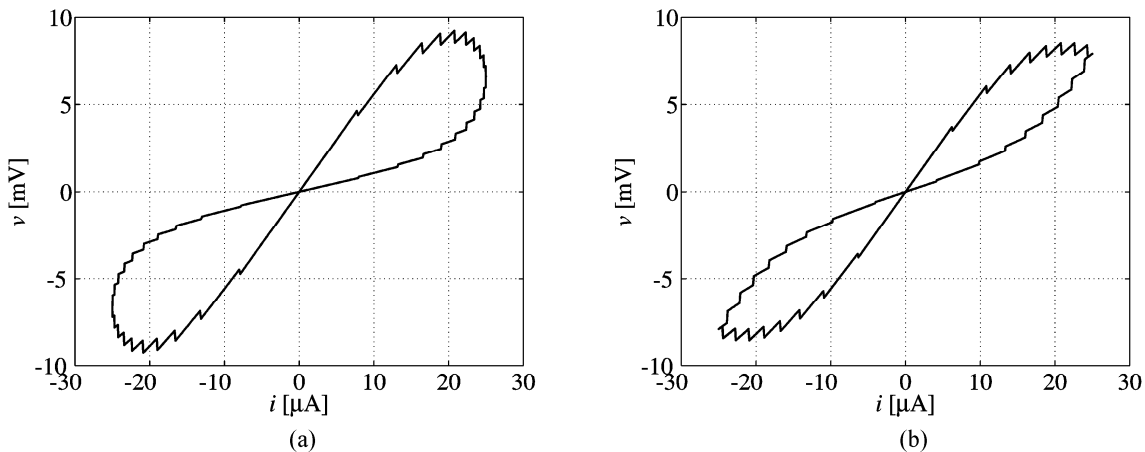
Za ilustraciju opisanog postupka, na pseudoslučajan način je generisana je monotono opadajuća funkcija $M(q^*)$. Generisani podaci su prezentovani u levoj koloni tabele 4. Ovi podaci simuliraju rezultate merenja.

Tabela 4. Primer podataka koji simuliraju rezultate merenja i izračunati parametri modela.

Pimer zadatih podataka			Računato		
k	$q^*_{\text{mereno}} [C]$	$M_{\text{mereno}} [\Omega]$	k	$q^*_{Ck} [C]$	λ_k
0	0.0000e+000	6.0000e+002	0	0.0000e+000	
1	2.5000e-006	5.5849e+002	1	1.2500e-006	8.3020e-002
2	5.0000e-006	5.1873e+002	2	3.7500e-006	7.9520e-002
3	7.5000e-006	4.8070e+002	3	6.2500e-006	7.6060e-002
4	1.0000e-005	4.4440e+002	4	8.7500e-006	7.2600e-002
5	1.2500e-005	4.0985e+002	5	1.1250e-005	6.9100e-002
6	1.5000e-005	3.7703e+002	6	1.3750e-005	6.5640e-002
7	1.7500e-005	3.4595e+002	7	1.6250e-005	6.2160e-002
8	2.0000e-005	3.1661e+002	8	1.8750e-005	5.8680e-002
9	2.2500e-005	2.8900e+002	9	2.1250e-005	5.5220e-002
10	2.5000e-005	2.6313e+002	10	2.3750e-005	5.1740e-002
11	2.7500e-005	2.3900e+002	11	2.6250e-005	4.8260e-002
12	3.0000e-005	2.1661e+002	12	2.8750e-005	4.4780e-002
13	3.2500e-005	1.9595e+002	13	3.1250e-005	4.1320e-002
14	3.5000e-005	1.7703e+002	14	3.3750e-005	3.7840e-002
15	3.7500e-005	1.5985e+002	15	3.6250e-005	3.4360e-002
16	4.0000e-005	1.4440e+002	16	3.8750e-005	3.0900e-002
17	4.2500e-005	1.3070e+002	17	4.1250e-005	2.7400e-002
18	4.5000e-005	1.1873e+002	18	4.3750e-005	2.3940e-002
19	4.7500e-005	1.0849e+002	19	4.6250e-005	2.0480e-002
20	5.0000e-005	1.0000e+002	20	4.8750e-005	1.6980e-002
			21	5.0000e-005	

Model je formiran sledeći gore opisanu proceduru. Iz zadatih podataka dobijeno je $q_b^* = 50 \mu C$, $R_a = 600 \Omega$, $R_b = 100 \Omega$ i $k_{\max} = 20$. Koeficijenti λ_k su računati iz (115). Izabrane su ekvidistantne tačke

date sa (85): $q_{Ck}^* = (2k-1)\Delta q^*$, gde je $\Delta q^* = q_b^*/(2k_{\max}) = 2,5\mu\text{C}$. Za poznate R_a , R_b , q_{Ck}^* i λ_k model memristora je u potpunosti definisan. Za zadatu strujnu pobudu, protekla količina naelektrisanja se računa korišćenjem (118), a potom memristansa iz (117) i napon $v(t) = M(q^*) i(t)$. Na slici 11(a) je prikazana histerezisna petlja dobijena za sinusnu pobudu $i(t) = I_m \sin(\omega t)$, $I_m = 25\mu\text{A}$, $\omega = 1\text{rad/s}$, dok je na slici 11(b) prikazana histerezisna petlja dobijena za pobudu u vidu povorke trougaonih impulsa amplitude $I_m = 25\mu\text{A}$ i kružne frekvencije $\omega = 1\text{rad/s}$.



Slika 11. Napon memristora na (a) sinusnu pobudu i (b) pobudu u vidu povorke trougaonih impulsa.

3.6. Kako je realizovano tehničko rešenje i gde se primenjuje, odnosno koje su mogućnosti primene

U tehničkom rešenju je prikazana nova metoda za modelovanje idealnih memristora, koja omogućava opisivanje karakteristike memristora u $\varphi-q$, $M-q$ ili $W-\varphi$ ravni, određivanje odziva na proizvoljnu pobudu (naponsku ili strujnu), kao i određivanje uštinute histerezisne petlje u $v-i$ ravni.

Kao demonstracija primene prikazane metode, na četiri primera je ilustrovano modelovanje karakteristika memristora, određivanje odziva i uštinutih histerezisnih petlji. U jednom od primera je ilustrovano formiranje modela memristora na osnovu podataka koji su generisani na pseudoslučajan način (podaci simuliraju rezultate merenja).

Modelovanje memristora je neophodno da bi se analizirale njegove osobine i mogućnosti primene, bez utroška sredstava za njegovo fabrikovanje i testiranje. Model memristora, opisan u ovom tehničkom rešenju, koriste istraživači sa Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu u aktivnostima koje se odnose na analizu ponašanja memristora, zatim analizu mogućnosti primene memristora, kao i za dalja istraživanja.

Postojeće rešenje je moguće primeniti i na modelovanje drugih mem-elemenata (mem-kondenzatora i mem-kalema).

4. Literatura

- [1] L. O. Chua, "Memristor – The missing circuit element," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 18, no. 5, pp. 507–519, Sep. 1971.
- [2] L. O. Chua, and S. M. Kang, "Memristive devices and systems," *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 2, pp. 209-223, Feb. 1976.
- [3] M. Di Ventra, Y. V. Pershin, and L. O. Chua, "Circuit elements with memory: Memristors, memcapacitors, and meminductors," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 10, pp. 1717-1724, Oct. 2009.
- [4] D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart, and R. S. Williams, "The missing memristor found," *Nature*, vol. 453, pp. 80–83, May 2008.
- [5] Y. N. Joglekar, and S. J. Wolf, "The elusive memristor: Properties of basic electrical circuits," *Eur. J. Phys.*, vol. 30, no. 4, pp. 661-675, May 2009.
- [6] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "SPICE model of memristor with non-linear dopant drift," *Radioengineering*, vol. 18, no. 2, pp. 210-214, June 2009.

- [7] T. Prodromakis, B. P. Peh, C. Papavassiliou, and C. Toumazou, "A versatile memristor model with non-linear dopant kinetics," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 58, no. 9, pp. 3099–3105, Sep. 2011.
- [8] P. S. Georgiou, S. N. Yaliraki, E. M. Drakakis, and M. Barahona, "Window functions and sigmoidal behaviour of memristive systems," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 44, no. 9, pp. 1685–1696, Sep. 2016.
- [9] H. Abdalla, and M. D. Pickett, "SPICE Modeling of Memristors," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, May 2011, pp. 1832–1835.
- [10] M. D. Pickett, D. B. Strukov, J. L. Borghetti, J. J. Yang, G. S. Snider, D. R. Stewart, and W. R. Stanley, "Switching dynamics in titanium dioxide memristive devices," *J. Appl. Phys.*, vol. 106, no. 7, pp. 074508-1–074508-6, Oct. 2009.
- [11] J. G. Simmons, "Generalized formula for the electric tunnel effect between similar electrodes separated by a thin insulating film," *J. Appl. Phys.*, vol. 34, no. 6, pp. 1793–1803, June 1963.
- [12] J. G. Simmons, "Electric tunnel effect between dissimilar electrodes separated by a thin insulating film," *J. Appl. Phys.*, vol. 34, no. 9, pp. 2581–2590, Sep. 1963.
- [13] C. Yakopcic, T. M. Taha, G. Subramanyam, R. E. Pino, and S. Rogers, "A memristor device model," *IEEE Electron Device Lett.*, vol. 32, no. 10, pp. 1436–1438, Oct. 2011.
- [14] K. Eshraghian, O. Kavehei, K.-R. Cho, J. M. Chappell, A. Iqbal, S. F. Al-Sarawi, and D. Abbott, "Memristive device fundamentals and modeling: Applications to circuits and systems simulation," *Proc. IEEE*, vol. 100, no. 6, pp. 1991 – 2007, June 2012.
- [15] S. Kvatinisky, E. G. Friedman, A. Kolodny, and U. C. Weiser, "TEAM: Threshold adaptive memristor model," *IEEE Trans. Circuits Syst.—I: Reg. Papers*, vol. 60, no. 1, pp. 211–221, Jan. 2013.
- [16] S. H. Jo, T. Chang, I. Ebong, B. B. Bhadviya, P. Mazumder, and W. Lu, "Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems," *Nano Lett.*, vol. 10, no. 4, pp. 1297–1301, Mar. 2010.
- [17] S. Shin, K. Kim, and S. M. Kang, "Compact models for memristors based on charge-flux constitutive relationships," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 590–598, Apr. 2010.
- [18] S. Shin, L. Zheng, G. Weickhardt, S. Cho, and S. M. Kang, "Compact circuit model and hardware emulation for floating memristor devices," *IEEE Circuits Syst. Mag.*, vol. 13, no. 2, pp. 42–55, May 2013.
- [19] C. Ma, S. Xie, Y. Jia, and G. Lin, "Macromodeling of the memristor using piecewise volterra series," *Microelectr. J.*, vol. 45, no. 3, pp. 325–329, Mar. 2014.
- [20] S. Benderli, and T. A. Wey, "On SPICE macromodelling of TiO₂ memristors," *Electron. Lett.*, vol. 45, no. 7, pp. 377–379, Mar. 2009.
- [21] A. Rak, and G. Cserey, "Macromodeling of the memristor in SPICE," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 632–636, Apr. 2010.
- [22] D. Batas, and H. Fiedler, "A memristor SPICE implementation and a new approach for magnetic flux-controlled memristor modeling," *IEEE Trans. Nanotechnol.*, vol. 10, no. 2, pp. 250–255, Mar. 2011.
- [23] F. Xu-Dong, T. Yu-Hua, and W. Jun-Jie, "SPICE modeling of memristors with multilevel resistance states," *Chin. Phys. B*, vol. 21, no. 9, pp. 098901-1- 098901-7, Sep. 2012.
- [24] X. Guan, S. Yu, and H. P. Wong, "A SPICE compact model of metal oxide resistive switching memory with variations," *IEEE Electron Device Lett.*, vol. 33, no. 10, pp. 1405–1407, Oct. 2012.
- [25] Y. V. Pershin, and M. Di Ventra, "SPICE model of memristive devices with threshold," *Radioengineering*, vol. 22, no. 2, pp. 485–489, June 2013.
- [26] C. Yakopcic, T. M. Taha, G. Subramanyam, and R. E. Pino, "Generalized memristive device SPICE model and its application in circuit design," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 32, no. 8, pp. 1201–1214, Aug. 2013.
- [27] F. Garcia-Redondo, R. P. Gowers, A. Crespo-Yepes M. Lopez-Vallejo, and L. Jiang, "SPICE compact modeling of bipolar/unipolar memristor switching governed by electrical thresholds," *IEEE Trans. Circuits Syst.—I: Reg. Papers*, vol. 63, no. 8, pp. 1255–1264, Aug. 2016.
- [28] W. Cai, F. Ellinger, R. Tetzlaff, and T. Schmidt, "Abel dynamics of titanium dioxide memristor based on nonlinear ionic drift model," *Arxiv 1105:2668*, 2011, p. 1–5.
- [29] P. S. Georgiou, M. Barahona, S. N. Yaliraki, and E. M. Drakakis, "Device properties of Bernoulli memristors," *Proc. IEEE*, vol. 100, no. 6, pp. 1938–1950, June 2012.
- [30] P. S. Georgiou, *A Mathematical Framework for the Analysis and Modelling of Memristor Nanodevices*, PhD thesis, Imperial College London, 2013.
- [31] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "Differential equations of ideal memristors," *Radioengineering*, vol. 24, no. 2, pp. 369–377, June. 2015.
- [32] Y. V. Pershin, S. La Fontaine, and M. Di Ventra, "Memristive model of amoeba learning," *Phys. Rev. E*, vol. 80, no. 2, pp. 021926-1–021926-6, Aug. 2009.

- [33] L. O. Chua, "Resistance switching memories are memristors," *Appl. Phys. A*, vol. 102, no. 4, pp. 765–783, Mar. 2011.
- [34] F. Corinto, A. Ascoli, and M. Gilli, "Analysis of current-voltage characteristics for memristive elements in pattern recognition systems," *Int. J. Circ. Theor. Appl.*, vol. 40, no. 12, pp. 1277–1320, Dec. 2012.
- [35] D. Biolek, Z. Biolek, and V. Biolkova, "Pinched hysteresis loops of ideal memristors, memcapacitors and meminductors must be 'self-crossing'," *Electron. Lett.*, vol. 47, no. 25, pp. 1385–1387, Dec. 2011.
- [36] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "Computation of the area of memristor pinched hysteresis loop," *IEEE Trans. Circuit Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 59, no. 9, pp. 607–611, Sep. 2012.
- [37] P. S. Georgiou, S. N. Yaliraki, E. M. Drakakis, and E. M. Barahona, "Quantitative measure of hysteresis for memristors through explicit dynamics," *Proc. R. Soc. A*, vol. 468, no. 2144, pp. 2210–2229, Aug. 2012.
- [38] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "Analytical computation of the area of pinched hysteresis loops of ideal mem-elements," *Radioengineering*, vol. 22, no. 1, pp. 132–135, Apr. 2013.
- [39] D. Biolek, Z. Biolek, and V. Biolkova, "Interpreting area of pinched memristor hysteresis loop," *Electron. Lett.*, vol. 50, no. 2, pp. 74–75, Jan. 2014.
- [40] Z. Biolek, and D. Biolek, "How can the hysteresis loop of the ideal memristor be pinched," *IEEE Trans. Circuit Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 61, no. 7, pp. 491–495, July 2014.
- [41] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "Specification of one classical fingerprint of ideal memristor," *Microelectr. J.*, vol. 46, no. 4, pp. 298–300, Apr. 2015.
- [42] Z. Biolek, D. Biolek, V. Biolkova, and Z. Kolka, "Comments on pinched hysteresis loops of memristive elements," *Radioengineering*, vol. 24, no. 4, pp. 962–967, Dec. 2015.
- [43] Z. Biolek, D. Biolek, V. Biolkova, and Z. Kolka, "Variation of a classical fingerprint of ideal memristor," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 44, no. 5, pp. 1202–1207, May 2016.
- [44] Z. Biolek, D. Biolek, and V. Biolkova, "Hysteresis versus PSM of ideal memristors, memcapacitors, and meminductors," *Electron. Lett.*, vol. 52, no. 20, pp. 1669–1671, Sep. 2016.
- [45] Z. Biolek, D. Biolek, V. Biolkova, Z. Kolka, A. Ascoli, and R. Tetzlaff, "Analysis of memristors with nonlinear memristance versus state map," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 45, no. 4, pp. 385–405, Apr. 2017.
- [46] S. Elwakil, M. E. Fouda, and A. G. Radwan, "A simple model of double-loop hysteresis," *IEEE Trans. Circuit Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 60, no. 8, pp. 487–491, Aug. 2013.
- [47] X. M. Wang, and S. Y. R. Hui, "Pinched hysteresis loops and symmetry," *IET Sci. Meas. Technol.*, vol. 11, no. 1, pp. 134–140, Jan. 2017.
- [48] X. M. Wang, and S. Y. R. Hui, "Graphical modelling of pinched hysteresis loops of memristors," *IET Sci. Meas. Technol.*, vol. 11, no. 1, pp. 86–96, Jan. 2017.
- [49] Y. Yu, B. Bao, H. Kang, and M. Shi, "Calculating area of fractional-order memristor pinched hysteresis loop," *J. Eng.*, 3, pp. Nov. 2015.
- [50] B. Raj, and S. Vaidyanathan "Analysis of Dynamic Linear Memristor Device Models," *Advances in Memristors, Memristive Devices and Systems, Studies in Computational Intelligence 701*, pp. 449–476, 2017.
- [51] Y. V. Pershin, and M. Di Ventra, "Memory effects in complex materials and nanoscale systems," *Adv. Phys.*, vol. 60, no. 2, pp. 145–227, Apr. 2011.
- [52] S. P. Adhikari, M. P. Sah, H. Kim, and L. O. Chua, "Three fingerprints of memristor," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 60, no. 11, pp. 3008–3021, Nov. 2013.
- [53] M. P. Sah, H. Kim, and L. O. Chua, "Brains are made of memristors," *IEEE Circuits Syst. Mag.*, vol. 14, no. 1, pp. 12–36, Feb. 2014.
- [54] R. K. Budhathoki, M. P. Sah, S. P. Adhikari, H. Kim, and L. O. Chua, "Composite behavior of multiple memristor circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 60, no. 10, pp. 2688–2700, Oct. 2013.
- [55] L. O. Chua, "Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask," *Radioengineering*, vol. 24, no. 2, pp. 319–368, June 2015.
- [56] Z. Y. Yin, H. Tian, G. H. Chen, and L. O. Chua, "What are memristor, memcapacitor, and meminductor?" *IEEE Trans. Circuit Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 62, no. 48, pp. 402–406, Apr. 2015.



УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ САДУ



ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Република Србија
Деканат: 021 6350-413; 021 450-810; Централа: 021 485 2000
Рачуноводство: 021 458-220; Студентска служба: 021 6350-763
Телефакс: 021 458-133; e-mail: ftndean@uns.ac.rs

ИНТЕГРИСАН
СИСТЕМ
МЕНАЏМЕНТА
СЕРТИФИКОВАН ОД:



Наш број: 01.сл

Ваш број: _____

Датум: 2017-09-04

ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научно веће Факултета техничких наука у Новом Саду, на 41. редовној седници одржаној дана 30.08.2017. године, донело је следећу одлуку:

-непотребно изостављено-

ТАЧКА 13.1. Верификација нових техничких решења и именовање рецензената

Тачка 13.1.1.: На основу позитивног извештаја рецензената верификује се техничко решење (М85) под називом:

“МЕТОДА ЗА МОДЕЛОВАЊЕ ПОНАШАЊА ИДЕАЛНОГ МЕМРИСТОРА”

Аутори техничког решења: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић.

-непотребно изостављено-

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:
Секретар

36

Иван Нешковић, дипл. правник



Декан

Проф. др Раде Дорословачки



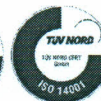
УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ САДУ



ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Република Србија
Деканат: 021 6350-413; 021 450-810; Централа: 021 485 2000
Рачуноводство: 021 458-220; Студентска служба: 021 6350-763
Телефакс: 021 458-133; e-mail: ftndean@uns.ac.rs

ИНТЕГРИСАНИ
СИСТЕМ
МЕНАџМЕНТА
СЕРТИФИКОВАН ОД:



Наш број: _____
Ваш број: _____
Датум: 2017-05-28

ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научно веће Факултета техничких наука у Новом Саду на 39. редовној седници одржаној дана 28.6.2017. године, донело је следећу одлуку:

-непотребно изостављено-

Тачка 13.1. Верификација нових техничких решења и именовање рецензента

Тачка 13.1.1.: У циљу верификације новог техничког решења усвајају се рецензенти:

1. Др Вељко Папић, доцент, Електротехнички факултет у Београду
2. Др Александар Купусинац, ванредни професор, Факултет техничких наука у Новом Саду

Назив техничког решења:

“МЕТОДА ЗА МОДЕЛОВАЊЕ ПОНАШАЊА ИДЕАЛНОГ МЕМРИСТОРА”

Аутори техничког решења: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић.

-непотребно изостављено-

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:
Секретар

Иван Нешковић, дипл. правник

Декан

Проф. др Рађе Дорословачки

РЕЦЕНЗИЈА ПРЕДЛОЖЕНОГ ТЕХНИЧКОГ РЕШЕЊА

Предмет: Мишљење о испуњености критеријума за признавање техничког решења

Назив техничког решења

Метода за моделовање понашања идеалног мемристора

Аутори: Анамарија Јухас и Станиша Даутовић

Техничко решење је развијено у оквиру пројекта технолошког развоја ТР-32016, руководиоца пројекта: Проф. др Љиљана Живанов

Образложење

Моделовање идеалног мемристора има велики значај у анализи и синтези мемристивних кола и мрежа, пре процеса њихове фабрикације и тестирања. Предвиђа се да ће будуће генерације рачунарских меморија бити базиране на мемристорима због атрактивних особина као што су нанометарске димензије, мала потрошња, велика брзина, као и могућност вишебитног записа.

У техничком решењу је приказана нова аналитичка метода за моделовање идеалног мемристора контролисаног струјом или напоном. Метода се заснива на формирању линеарне комбинације двосегментних део-по-део линеарних карактеристика у $q-\phi$ равни. У оквиру техничког решења је приказано стање решености овог проблема у свету и указано на тзв. „проблем крајњег стања“ који је присутан у већини макро-модела мемристора.

Као илустрација примене развијене методе, приказано је како се она може успешно применити за моделовање мемристора познатих из литературе (ХП мемристор, Јо мемристор, мемристор са конститутивном релацијом облика $\phi=q+q^3/3$), као и за моделовање карактеристике идеалног мемристора када су познати резултати мерења у $v-i$ равни, који се могу превести у $q-M$ раван.

Помоћу овог техничког решења се могу на лак начин математички моделовати идеални мемристори. Слично као у поступцима оптимизације са више циљева, предложена метода омогућава да се произвољна тачност развијеног модела замени за брзину рада алгоритма који симулира понашање мемристора на рачунару.

Закључак

На основу свега наведеног, предлажем да се Техничко решење под називом „**Метода за моделовање понашања идеалног мемристора**“ чији су аутори Анамарија Јухас и Станиша Даутовић прихвати као ново техничко решење на пројекту ТР-32016 Министарства просвете, науке и технолошког развоја и класификује као резултат: **М85-НОВА МЕТОДА**.

У Новом Саду,
07. 07. 2017. године


Проф. др Александар Купусина
Факултет техничких наука
Универзитет у Новом Саду

РЕЦЕНЗИЈА ТЕХНИЧКОГ РЕШЕЊА

„Метода за моделовање понашања идеалног мемристора“

аутори: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић

пројекат: TR32016 Министарства просвете, науке и технолошког развоја

Кратак приказ разматраног техничког решења

У техничком решењу је развијен нов математички модел идеалног мемристора базиран на линеарној комбинацији двосегментних део по део линеарних карактеристика у $q - \varphi$ (наелектрисање-флуks) равни. У првом делу техничког решења је приказано стање решености овог проблема у свету и дат исцрпан преглед постојећих модела мемристора доступних у литератури. У другом делу су приказане основне особине идеалног мемристора, као и начини његовог описивања у $q - \varphi$ и нормализованој $q^* - \varphi^*$ равни, односно у $q - M$ (наелектрисање-мемристанса) и нормализованој $q^* - M$ равни. У овом делу је као илустрација сврсисходности моделовања мемристора у нормализованим $q^* - \varphi^*$ и $q^* - M$ равнима, моделован линеаран модел Hewlett Packard (HP) мемристора, за који је аналитички израчуната и површина уштинуте хистерезисне петље у случају четири побуде: поворке импулса, поворке правоугаоних импулса, поворке троугаоних импулса и поворке тестерастих импулса. У следећем делу је приказан главни допринос овог техничког решења, општи поступак моделовања идеалног мемристора преко линеарне комбинације двосегментних карактеристика у $q^* - \varphi^*$ равни, у случајевима напоном и струјом контролисаног мемристора. Претходна разматрања су у последњем делу техничког решења примењена на моделовање мемристора у четири случаја: а) моделовање струјом контролисаног HP мемристора, б) моделовање напоном контролисаног Jo мемристора, ц) моделовање мемристора са нормализованом кубном $q^* - \varphi^*$ карактеристиком и д) моделовање апроксимативне карактеристике мемристора на основу резултата мерења, у случају када су познати парови тачака (q_k, M_k) , $k = 0, \dots, k_{\max}$, за струјом контролисан мемристор.

Оцена техничког решења

Предложена нова метода за математичко моделовање мемристора је општа, једноставна за примену и решава тзв. „проблем крајњег стања“ који је присутан у многим моделима доступним у постојећој литератури (проблем трајног остајања мемристора у стању сатурације). Овим моделом се такође може произвољно блиско апроксимирати јединствена, нелинеарна, континуална и монотонно растућа карактеристика мемристора у $q - \varphi$ равни, повећањем броја елементарних двосегментних $q - \varphi$ карактеристика које чине линеарну комбинацију.

Значај остварених резултата

Разматрани проблем је актуелан и за његово решавање постоји континуалан инжењерски интерес, што се може закључити на основу бројних чланака објављених од 2008. године до данас. Развијени математички модел може да апроксимира јединствену, нелинеарну, континуалну и монотонно растућу карактеристику мемристора у $q - \varphi$ равни са произвољном тачношћу. У случају моделовања изузетно великих мемристивних мрежа (нпр. код моделовања

будућих RRAM меморијских чипова), тачност модела се може „разменити“ за брзину извршавања симулације понашања на рачунару, што може бити од великог значаја приликом различитих фаза пројектовања VLSI RRAM чипова. Нови математички модел не користи типичне „прозорске функције“ и не зависи од различитих физичких феномена на којима се базира мемристивна функционалност. Модел се лако може проширити и на математичко моделовање понашања мемкондензатора и/или мемкалемова.

Закључак

Разматрано техничко решење је оригинално, применљиво и значајно у области моделовања понашања идеалног мемристора. У том смислу га позитивно оцењујем и предлажем да се техничко решење „Метода за моделовање понашања идеалног мемристора“, чији су аутори Анамарија Јухас и Станиша Даутовић прихвати и класификује као резултат „М85-нова метода“.

Београд
6. јул 2017.



Доц. др Вељко Папић
Електротехнички факултет
Универзитет у Београду