

TEHNIČKO REŠENJE

Metoda za određivanje maksimalne efikasnosti klase-F i inverzne klase-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika

M-85: Prototip, nova metoda, softver, standardizovan ili atestiran instrument, nova genetska proba, mikroorganizmi

Autori:

Dr Anamarija Juhas, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu,

Dr Staniša Dautović, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu,

Dr Ladislav Novak, Univerzitet u Novom Sadu

Godina

2017

Podtip tehničkog rešenja:

Nova Metoda - M85

Korisnik:

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, za potrebe daljih istraživanja

Projekat u okviru koga je realizovano tehničko rešenje:

Broj projekta: TR 32016 Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije

Program istraživanja u oblasti tehnološkog razvoja za period 2011-2017.

Tehnološka oblast: Elektronika, telekomunikacije i informacione tehnologije

Naziv projekta: Inovativne elektronske komponente i sistemi bazirani na neorganskim i organskim tehnologijama ugrađeni u robe i proizvode široke potrošnje

Rukovodilac projekta: dr Ljiljana Živanov, redovni profesor

Kako su rezultati verifikovani (od strane kog tela):

Verifikacija tehničkog rešenja je izvršena od strane:

Naučno-nastavnog veća Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

1. Opis problema koji se rešava tehničkim rešenjem

Oblast na koju se tehničko rešenje odnosi

Teorija signala i sistema, teorija električnih kola, pojačavači snage

Problem koji se tehničkim rešenjem rešava

Problem određivanja maksimalne efikasnosti pojačavača snage u klasi-F i inverznoj klasi-F sa konačnim brojem harmonika je do ovog tehničkog rešenja bio otvoren problem. U literaturi su poznate vrednosti maksimalne efikasnosti u ovim klasama samo do petog harmonika.

U okviru tehničkog rešenja prikazana je metoda za određivanje optimalnih signala sa osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima. Takav tip signala se pojavljuje kao signal struje u klasi-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika, odnosno kao signal napona u inverznoj klasi-F sa konačnim brojem harmonika. Poznavanje ovih optimalnih signala omogućilo je određivanje maksimalne efikasnosti pojačavača snage u klasi-F i inverznoj klasi-F sa konačnim brojem harmonika. To je ujedno i maksimalna efikasnost pojačavača snage u kontinualnoj klasi-F i kontinualnoj inverznoj klasi-F sa konačnim brojem harmonika.

2. Stanje rešenosti tog problema u svetu

Za pojačavače snage u klasi-F i njoj dualnoj inverznoj klasi-F postoji stalan i aktuelan istraživački interes, npr. [1]-[10]. Poznavanje optimalnih signala je važno u istraživanju i realizaciji pojačavača snage [5], [10]-[19]. Modelovanje signala (eng. waveform engineering) je postala ključna karika u dizajnu pojačavača snage [8], [18], [19]. Poznavanje željenih signala vodi ka tome da dizajn pojačavača postaje manje zavisao od tehnologije koja se koristi za izradu tranzistora [19].

Optimalan signal iz neke klase trigonometrijskih polinoma je onaj nenegativni trigonometrijski polinom koji ima najveću amplitudu osnovnog harmonika. Problem određivanja optimalnog signala ima dugu istoriju i privukao je pažnju matematičara npr. [20], ali još više pažnju inženjera, jer se pojavljuje u dizajnu pojačavača snage pri određivanju maksimalne efikasnosti npr. [1], [5], [10] [12]-[14], [17], [21]-[23].

Prema definiciji klase-F i inverzne klase-F pojačavača snage, svaki viši harmonik postoji u najviše jednom signalu strujno-naponskog para npr. [1]. Za pojačavač snage u klasi-F, uobičajena pretpostavka je da signal struje sadrži vremenski konstantnu komponentu, osnovni harmonik i određen broj uzastopnih parnih harmonika, dok naponski signal sadrži vremenski konstantnu komponentu, osnovni harmonik i određen broj uzastopnih neparnih harmonika. Inverzna klasa-F je dualna klasi-F. Kod inverzne klase-F signal napona sadrži parne harmonike, dok signal struje sadrži neparne harmonike.

Za pojačavač snage se kaže da radi u klasi-F sa N harmonika, ako signal struje sadrži vremenski konstantnu komponentu, osnovni harmonik i sve parne harmonike do N -tog, a signal napona vremenski konstantnu komponentu i sve neparne harmonike do N -tog. Za dualnu inverznu klasu-F sa N harmonika, signal struje sadrži vremenski konstantnu komponentu i sve neparne harmonike do N -tog, dok signal napona sadrži vremenski konstantnu komponentu, osnovni harmonik i sve parne harmonike do N -tog.

Efikasnost klase-F i inverzne klase-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika i maksimalno zaravnjenim signalima je određena u radu [6]. Pod maksimalno zaravnjenim signalima se podrazumevaju nenegativni signali koji imaju maksimalno zaravnjen minimum. U radu [6] je pokazano da je koeficijent uz osnovni harmonik maksimalno zaravnjenog signala sa osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima do $2M$ – tog jednak

$$a_{1,\text{flat}} = \frac{((2M)!!)^2}{(2M-1)!!(2M+1)!!}. \quad (1)$$

Osim toga, pokazano je da je koeficijent uz osnovni harmonik maksimalno zaravnjenog signala sa osnovnim i uzastopnim neparnim harmonicima do $(2K+1)$ – vog jednak

$$b_{1,\text{flat}} = \frac{1}{4^K} \frac{((2K+1)!!)^2}{K!(K+1)!}. \quad (2)$$

U [6] je dokazano da se efikasnost klase-F pojačavača sa maksimalno zaravnjenim signalima najlakše može povećati tako što se harmonici dodaju redom naizmenično u signale napona i struje (prvo drugi harmonik u signal struje, zatim treći u signal napona, četvrti u signal struje, itd.). Za inverznu klasu-F situacija je dualna: prvo drugi harmonik u signal napona, zatim treći u signal struje, četvrti u signal napona, itd. Time je dokazano da je bolje dodavati harmonike po njihovom numeričkom redosledu, nego povećavati broj harmonika u samo jednom signalu. U slučaju klase-F ili inverzne klase-F sa N harmonika je ili $M = K$ ili $M = K + 1$, i red najvišeg harmonika je $N = 1 + M + K$. Efikasnosti pojačavača snage u klasi-F i inverznoj klasi-F sa N harmonika i maksimalno zaravnjenim signalima jednaka je [6]

$$\eta_{N,\text{flat}} = \frac{N}{N+1}. \quad (3)$$

Maksimalno zaravnjeni signali nisu optimalni, zbog čega efikasnost računata na osnovu ovih signala nije maksimalno moguća.

Problem određivanja maksimalne efikasnosti pojačavača snage u klasi-F sa konačnim brojem harmonika je prvi put je razmatran u radu [1]. Iako su analitički oblici optimalnih signala sa prvim i drugim, odnosno prvim i trećim harmonikom bili poznati i ranije, u radu [1] su prvi put istovremeno razmatrani optimalni signali struje i napona za klasu-F sa konačnim brojem harmonika. U tom radu je određena maksimalna efikasnost u zatvorenoj formi za klasu-F sa dva i tri harmonika, dok je maksimalna efikasnost za klasu F sa četiri i pet harmonika, dobijena numeričkim putem.

Za klasu-F i inverznu klasu-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika, maksimalne efikasnosti u zatvorenoj formi sa četiri i pet harmonika su određene u radu [9]. Maksimalne efikasnosti klase-F i inverzne klase-F sa konačnim brojem harmonika, do petog, prikazane su u tabeli 1.

Tabela 1. Maksimalne efikasnosti za klasu-F i inverznu klasu-F pojačavača snage do petog harmonika.

N	η_{max}
1	$1/2 = 0,5000$
2	$\sqrt{1/2} = 0,7071$
3	$\sqrt{2/3} = 0,8165$
4	$\sqrt{3}/2 = 0,8660$
5	$3(1+\sqrt{2})/8 = 0,9053$

U literaturi postoje rezultati za klasu-F i inverznu klasu-F sa beskonačnim brojem harmonika u sledeća tri slučaja:

- (i) sa beskonačno mnogo harmonika u oba signala, maksimalna efikasnost jednaka je 1 [24],
- (ii) sa beskonačno mnogo harmonika u signalu struje u vidu tzv. odsečenog biharmonijskog signala, pri čemu signal napona osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika sadrži i treći harmonik za klasu-F, odnosno drugi harmonik za inverznu klasu-F [10],
- (iii) sa beskonačno mnogo harmonika u signalu struje u vidu tzv. polusinusoidalnog signala struje i signalom napona koji osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži i uzastopne neparne harmonike [12]. U tom slučaju maksimalna efikasnost jednaka je

$$\eta_{\text{Rhodes}} = \frac{\pi}{2(K+2)} \text{ctg} \frac{\pi}{2(K+2)}, \quad (4)$$

gde $\text{ctg}(\cdot)$ označava kotangens funkciju i $2K+1$ je red najvišeg harmonika koji je prisutan u signalu napona. U radu [12], prilikom određivanja maksimalne amplitude osnovnog harmonika napona, pretpostavljeni su potrebni uslovi koji obezbeđuju da nenegativan signal sa prvih K uzastopnih neparnih harmonika (najviši harmonik je reda $(2K+1)$) ima K globalnih minimuma jednakih nuli bez obrazloženja zašto tačno/samo K (napomenimo da trigonometrijski polinom $(2K+1)$ – og stepena može imati do $(2K+1)$ globalnih minimuma jednakih nuli). U nastavku razmatranja pretpostavljen je i položaj globalnih minimuma, takođe bez obrazloženja. Iz uslova da je signal jednak nuli u tim tačkama,

određena je amplituda osnovnog harmonika. Samim tim u tom radu nije dokazano da postoji nenegativan signal sa tom amplitudom osnovnog harmonika, kao ni da dobijena vrednost odgovara najvećoj amplitudi osnovnog harmonika. Modifikacijom metoda predložene u ovom tehničkom rešenju, može se potvrditi tačnost rezultata u radu [12]. Numeričke simulacije takođe su pokazale da je rezultat objavljen u [12] tačan.

U slučaju pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika, poznata je maksimalna efikasnost klase-C i inverzne klase-C. U radu [13] je pokazano da je maksimalna efikasnost klase-C u funkciji broja uzastopnih harmonika u signalu struje jednaka

$$\eta_{\max, \text{class-C}} = \cos \frac{\pi}{N+2}, \quad (5)$$

gde N označava red najvišeg harmonika. U dualnoj klasi, tzv. inverznoj klasi-C sa konačnim brojem harmonika, maksimalna efikasnost se takođe može izračunati iz (5), pri čemu kod inverzne klase-C, N predstavlja broj uzastopnih harmonika u signalu napona.

3. Detaljan opis tehničkog rešenja (uključujući i prateće ilustracije i tehničke crteže)

U ovom tehničkom rešenju je opisan postupak određivanja optimalnog signala koji osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži i uzastopne parne harmonike (odjeljak 3.1). Na osnovu koeficijenta uz osnovni harmonik optimalnih signala, određene su maksimalne efikasnosti pojačavača snage u klasi-F sa konačnim brojem harmonika i inverznoj klasi-F sa konačnim brojem harmonika (odjeljak 3.2).

3.1. Optimalan signal sa osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima

U ovom odeljku, iz klase signala sa vremenski konstantnom komponentom, osnovnim harmonikom i prvih M uzastopnih parnih harmonika,

$$w_{\text{even}}(\tau) = 1 + a_1 \cos \tau + \sum_{m=1}^M a_{2m} \cos(2m\tau), \quad (6)$$

gde je $a_{2M} \neq 0$, i τ označava ωt , određen je nenegativan signal sa maksimalnom vrednošću koeficijenta a_1 .

U nastavku ovog odeljka, prvo je određena maksimalna vrednost koeficijenta a_1 (odjeljak 3.1.1). U odeljku 3.1.2 su određeni analitički izrazi za koeficijente optimalnog signala tipa (6). Nezavisna numerička verifikacija vrednosti koeficijenata optimalnih signala opisana je u odeljku 3.1.3.

3.1.1. Najveća vrednost koeficijenta uz osnovni harmonik

Za određivanje optimalnog signala tipa (6) korišćena je modifikacija procedure predložene u radu [20]. Procedura opisana u [20] rešava problem određivanja optimalnog signala koji osim vremenski konstantne komponente sadrži i prvih N uzastopnih harmonika. Ta procedura je u ovom tehničkom rešenju modifikovana na način da su postavljani dodatni uslovi da signal osim osnovnog sadrži samo uzastopne parne harmonike (svih viših neparnih harmonika nema). Pokazalo se da postavljanje dodatnih uslova znatno usložnjava problem određivanja maksimalne amplitude osnovnog harmonika.

Pokažimo prvo da koeficijent uz osnovni harmonik nenegativnog signala $w_{\text{even}}(\tau)$ tipa (6) zadovoljava nejednakost

$$|a_1| \leq (M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)}. \quad (7)$$

Da bismo to pokazali, označimo sa

$$\tau_r = \frac{\pi}{2} + \frac{(2r-1)\pi}{2(M+1)}, \quad r = 1, \dots, M+1. \quad (8)$$

Korišćenjem identiteta [25]

$$\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2m\tau_r) = (-1)^m \sum_{r=1}^{M+1} \cos \frac{(2r-1)\pi}{M+1} = 0, \quad (9)$$

dobija se

$$\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r) = M+1 + a_1 \sum_{r=1}^{M+1} \cos \tau_r, \quad (10)$$

$$\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r + \pi) = M+1 - a_1 \sum_{r=1}^{M+1} \cos \tau_r. \quad (11)$$

Uvrštavanjem identiteta [25]

$$\sum_{r=1}^{M+1} \cos \tau_r = - \sum_{r=1}^{M+1} \sin \frac{(2r-1)\pi}{2(M+1)} = - \left[\sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}, \quad (12)$$

u (10)-(11) dobija se

$$\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r) = M+1 - a_1 \left[\sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}, \quad (13)$$

$$\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r + \pi) = M+1 + a_1 \left[\sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Iz uslova da je signal $w_{\text{even}}(\tau)$ nenegativan sledi $\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r) \geq 0$ i $\sum_{r=1}^{M+1} w_{\text{even}}(\tau_r + \pi) \geq 0$. Ovi izrazi zajedno sa (13) i (14), respektivno, daju (7).

U okviru ovog odeljka pokazacemo da postoji nenegativan signal čiji koeficijent a_1 zadovoljava jednakost u izrazu (7).

Prema klasičnom rezultatu [20], signal $w_{\text{even}}(\tau)$ tipa (6) je nenegativan ako i samo ako postoji $(2M+1)$ -torka $(x_0, x_1, \dots, x_{2M})$ realnih brojeva koja zadovoljava sledeće relacije:

$$0 = 1 - \sum_{i=0}^{2M} x_i^2, \quad (15)$$

$$a_1 = 2 \sum_{i=0}^{2M-1} x_i x_{i+1}, \quad (16)$$

$$a_{2m} = 2 \sum_{i=0}^{2M-2m} x_i x_{i+2m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (17)$$

$$a_{2m+1} = 2 \sum_{i=0}^{2M-2m-1} x_i x_{i+2m+1}, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (18)$$

Iz $a_{2M} \neq 0$ (videti (17) za $m = M$) sledi

$$x_0 x_{2M} \neq 0. \quad (19)$$

U slučaju signala $w_{\text{even}}(\tau)$, svi koeficijenti (18) jednaki su nuli

$$\sum_{i=0}^{2M-2m-1} x_i x_{i+2m+1} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (20)$$

Označimo sa

$$x = [x_0, x_1, \dots, x_{2M}]^T, \quad (21)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Matrica U označava $(2M+1) \times (2M+1)$ gornju matricu pomeranja (eng. upper shift matrix), dok matrica L označava $(2M+1) \times (2M+1)$ donju matricu pomeranja (eng. lower shift matrix). Primititi da $U^{2M+1} = 0$ i $L^{2M+1} = 0$.

U terminima vektora x i matrica U i L , izrazi (16), (15), (20) i (17) se mogu napisati u obliku

$$a_1 = x^T (U + L) x, \quad (23)$$

$$x^T x = 1, \quad (24)$$

$$x^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) x = 0, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad (25)$$

$$a_{2m} = x^T (U^{2m} + L^{2m}) x, \quad m = 1, \dots, M, \quad (26)$$

gde T označava operaciju transponovanja.

3.1.1.1. Reformulacija problema

Problem određivanja nenegativnog signala tipa (6) sa maksimalnom vrednošću koeficijenta a_1 , može se preformulisati u ekvivalentan problem određivanja maksimuma funkcije

$$\gamma_{\text{even}} = x^T (U + L) x, \quad (27)$$

pod M uslova,

$$g_0 = 1 - x^T x = 0, \quad (28)$$

$$g_m = x^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) x = 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (29)$$

Primenom metode Lagranžovih množilaca (eng. Lagrange multipliers method), problem se svodi na problem određivanja maksimuma glatke funkcije

$$\Lambda = \gamma_{\text{even}} + t_0 g_0 + \sum_{m=1}^{M-1} t_{2m+1} g_m. \quad (30)$$

Na osnovu metode Lagranžovih množilaca, sistem jednačina:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_m} = 0, \quad m = 0, \dots, 2M, \quad (31)$$

zajedno sa uslovima (28)-(29) omogućava određivanje kritičnih tačaka funkcije Λ . Lako je pokazati da se sistem (31) može napisati u obliku

$$Tx = 0, \quad (32)$$

gde je x dato sa (21) i

$$T = -t_0 I + U + L + \sum_{m=1}^{M-1} t_{2m+1} (U^{2m+1} + L^{2m+1}) \quad (33)$$

je $(2M+1) \times (2M+1)$ realna simetrična Toeplitz-ova matrica oblika

$$T = \begin{bmatrix} -t_0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-1} & 0 \\ 1 & -t_0 & 1 & \dots & 0 & t_{2M-1} \\ 0 & 1 & -t_0 & \dots & t_{2M-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{2M-1} & 0 & t_{2M-3} & \dots & -t_0 & 1 \\ 0 & t_{2M-1} & 0 & \dots & 1 & -t_0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Toeplitz-ove matrice imaju iste elemente duž dijagonala paralelnih glavnoj dijagonali. Simetrične Toeplitz-ove matrice su potpuno definisane sa svojom prvom vrstom (ili kolonom).

Na osnovu (24), x nije nula-vektor. Zato iz (32) sledi

$$\det(T) = 0, \quad (35)$$

odnosno matrica T je singularna. U narednom odeljku odredićemo rang matrice T .

Osim toga, iz (32) sledi $x^T Tx = 0$. Uvrštavanjem (33) u $x^T Tx = 0$ dobija se

$$-t_0 x^T x + x^T (U + L) x + \sum_{m=1}^{M-1} t_{2m+1} x^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) x = 0. \quad (36)$$

Iz (27)-(29) i (36) sledi

$$\gamma_{\text{even}} = t_0. \quad (37)$$

Definišimo pomoćnu matricu

$$S = T + t_0 I. \quad (38)$$

Na osnovu (34) i (38), matrica S je simetrična Toeplitz-ova matrica koja ima nule na glavnoj dijagonali,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & t_{2M-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{2M-1} & 0 & t_{2M-3} & \dots & 0 & 1 \\ 0 & t_{2M-1} & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Iz (38) sledi da je relacija $\det(T) = 0$ ekvivalentna sa relacijom

$$\det(S - t_0 I) = 0. \quad (40)$$

Prema tome, maksimalna vrednost parametra γ_{even} ($\gamma_{\text{even}} = t_0$ na osnovu (37)) jednaka je najvećoj sopstvenoj vrednosti matrice S .

Primititi da je matrica S dobijena od matrice T promenom samo prvog elementa $-t_0$ u 0. Ova promena pomera čitav spektar matrice T za isti iznos [26], odnosno sve sopstvene vrednosti matrice T mogu se dobiti oduzimanjem t_0 od sopstvenih vrednosti matrice S .

3.1.1.2. Rang i višestrukost sopstvenih vrednosti matrice T

U ovom odeljku ćemo dokazati da je rang matrice T jednak $M+1$. Takođe ćemo dokazati da su sopstvene vrednosti matrice T jednake 0, $-t_0$ i $-2t_0$. Pokazaćemo da je sopstvena vrednost $-t_0$ prosta, dok su višestrukosti sopstvenih vrednosti 0 i $-2t_0$ iste i jednake M .

S obzirom da se spektar matrice T može dobiti iz spektra matrice S , u ovom odeljku analizirane su sopstvene vrednosti matrice S . Prvo ćemo pokazati da je karakteristični polinom matrice S oblika

$$\det(S - \lambda I) = -\lambda(\lambda^{2M} + \beta_2 \lambda^{2M-2} + \dots + \beta_{2M-2} \lambda^2 + \beta_{2M}). \quad (41)$$

Do oblika polinoma (41) se može doći korišćenjem Newton-ovih identiteta koji povezuju koeficijente karakterističnog polinoma sa tragovima stepenovane matrice S [27], [28]. Označimo elemente p -tog stepena matrice S sa $s_{i,j}^p$. Iz (39) se vidi da je $s_{i,j}^p = s_{i,j}^1 = 0$ kada je $i+j$ paran broj. Za $p=2$ lako je pokazati da je $s_{i,j}^2 = 0$ kada je $i+j$ neparan broj. Dalje, množenjem S^2 sa S dobija se S^3 sa $s_{i,j}^3 = 0$ kada je $i+j$ paran broj. Nastavljajući ovaj proces, za neparno p , $p=2k+1$, dobija se $s_{i,j}^{2k+1} = 0$ kada je $i+j$ paran broj. S obzirom da je $i+j$ parno za sve elemente na glavnoj dijagonali, sledi da je trag matrice S^{2k+1} jednak nuli,

$$\text{tr}(S^{2k+1}) = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (42)$$

Na osnovu Newton-ovih identiteta [27], [28], koeficijenti karakterističnog polinoma povezani su sa tragovima stepenovane matrice S rekurentnom relacijom

$$\beta_1 = -\text{tr}(S), \quad \beta_r = -\frac{1}{r} \sum_{p=1}^r \beta_{r-p} \text{tr}(S^p), \quad r=2, \dots, 2M. \quad (43)$$

Iz (42)-(43) sledi da se koeficijenti sa neparnim indeksom mogu odrediti iz

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_{2q+1} = -\frac{1}{2q+1} \sum_{p=1}^{2q+1} \beta_{2q+1-p} \text{tr}(S^p), \quad q=1, \dots, M-1. \quad (44)$$

U sumi u izrazu (44), u svakom sabirku $\beta_{2q+1-p} \text{tr}(S^p)$ je najmanje jedan od faktora jednak nuli, zato što su $2q+1-p$ i p različite parnosti. Preciznije, na osnovu (42) $\text{tr}(S^p) = 0$ kada je p neparan broj, a iz rekurentne relacije $\beta_{2q+1-p} = 0$ kada je p paran broj. Zato je $\beta_{2q+1} = 0$, $q=0, 1, \dots, M-1$, što dokazuje da je karakteristični polinom matrice S oblika (41).

S obzirom da je matrica S simetrična, sve njene sopstvene vrednosti su realne. Iz (41) sledi da je jedna sopstvena vrednost matrice S jednaka nuli, dok se sve ostale sopstvene vrednosti javljaju u parovima $\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_M$. Sledi da višestrukost sopstvene vrednosti, koja je različita od nule, ne može biti veća od M . Označimo sa n , $n \leq M$, višestrukost najveće sopstvene vrednosti matrice S .

Sada ćemo pokazati da višestrukost n najveće sopstvene vrednosti matrice S mora biti jednaka M , da bi svih M uslova datih sa (24) i (25) bilo zadovoljeno. Primititi da se uslovi (25) mogu napisati u obliku

$$x^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) x = 2x^T L^{2m+1} x = 0, \quad m=1, \dots, M-1. \quad (45)$$

Iz (45) i (19), sledi da je vektor x normalan na svaki od $(M-1)$ vektora $L^{2m+1} x$, $m=1, \dots, M-1$. S

obzirom da ovi vektori nisu nula-vektori i da su linearno nezavisni [29], [30], sledi da su uslovi (45) nezavisni. Osim toga, uslov (28) se može interpretirati kao normalizacija dužine vektora x .

Za realane simetrične matrice algebarska i geometrijska višestrukost sopstvenih vrednosti su jednake, npr. [29]. Samim tim, sopstvenoj vrednosti višestrukosti n , odgovara n linearno nezavisnih sopstvenih vektora. U slučaju višestruke sopstvene vrednosti Toeplitz-ove matrice, odgovarajući linearno nezavisni sopstveni vektori mogu se izabrati u obliku [29], [30] $v, Lv, L^2v, \dots, L^{n-1}v$, gde je L dato sa (22) i

$$v = [v_0, v_1, \dots, v_{2M+1-n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1) \text{ nula}}]^T. \quad (46)$$

Sledi da se svaki sopstveni vektor $x = [x_0, x_1, \dots, x_{2M}]^T$ koji odgovara višestrukoj sopstvenoj vrednosti može napisati kao linearna kombinacija [30]

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^i v, \quad (47)$$

gde je $L^0 = I$. Uvrštavanjem (47) u (24) i (45) dobija se

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j \alpha_i v^T U^j L^i v = 1, \quad (48)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j \alpha_i v^T U^j (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^i v = 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (49)$$

Lako je pokazati da $v^T U^j L^{j+k} v = v^T U^{j+k} L^j v = v^T L^k v$ za $j = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, $n \leq M$. Sledi da se (48) može napisati u obliku

$$v^T v \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} v^T L^k v \sum_{p=0}^{n-1-k} \alpha_p \alpha_{p+k} = 1. \quad (50)$$

Osim toga, iz $v^T U^j (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^{j+k} v = v^T U^{j+k} (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^j v = v^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^k v$ za $j = 0, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, $n \leq M$, sledi da se (49) može napisati u obliku

$$v^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) v \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p^2 + \sum_{k=0}^{n-1} v^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^k v \sum_{p=0}^{n-1-k} \alpha_p \alpha_{p+k} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (51)$$

Označimo sa

$$h_k = \sum_{p=0}^{n-1-k} \alpha_p \alpha_{p+k}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (52)$$

Uvrštavanjem (52) u (50)-(51) dobija se

$$\begin{aligned} h_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_k (v^T L^k v) &= 1, \\ h_0 v^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) v + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_k v^T (U^{2m+1} + L^{2m+1}) L^k v &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (53)$$

Sistem (53) se može posmatrati kao nehomogen sistem linearnih jednačina u terminima n nepoznatih h_k , $k = 0, \dots, n-1$. S obzirom da ovaj sistem sadrži M nezavisnih jednačina (zato što su uslovi nezavisni) i $n \leq M$, sledi da sistem ima rešenje ako i samo ako je $n = M$.

Prema tome, višestrukost n najveće sopstvene vrednosti matrice S jednaka je M . Na osnovu karakterističnog polinoma (41) sledi da matrica S osim proste sopstvene vrednosti jednake 0, ima još samo dve sopstvene vrednosti, obe višestrukosti M . Dalje iz (40) sledi da su višestruke sopstvene vrednosti matrice S jednake t_0 i $-t_0$. S obzirom da pomeranje celog spektra matrice S za $-t_0$ daje ceo spektar matrice T , sledi da matrica T ima sopstvenu vrednost jednaku nuli višestrukosti M , prostu sopstvenu vrednost $-t_0$ i sopstvenu vrednost $-2t_0$ višestrukosti M . Na osnovu teoreme o rang i defektu matrice (eng. rank-nullity theorem), višestrukost sopstvene vrednosti jednake nuli i rang matrice reda $(2M+1) \times (2M+1)$ zadovoljavaju relaciju $M + \text{rang}(T) = 2M+1$, iz koje sledi

$$\text{rang}(T) = M+1. \quad (54)$$

3.1.1.3. Singularno proširenje matrice T

Singularno proširenje Toeplitz-ove matrice očuvava njen rang [29]. Singularno proširenje matrice T označićemo sa T_{ext} . To je $(2M+2) \times (2M+2)$ matrica oblika

$$T_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} -t_0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-1} & 0 & y \\ 1 & -t_0 & 1 & \dots & 0 & t_{2M-1} & 0 \\ 0 & 1 & -t_0 & \dots & t_{2M-3} & 0 & t_{2M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{2M-1} & 0 & t_{2M-3} & \dots & -t_0 & 1 & 0 \\ 0 & t_{2M-1} & 0 & \dots & 1 & -t_0 & 1 \\ y & 0 & t_{2M-1} & \dots & 0 & 1 & -t_0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Proširena matrica T_{ext} je dobijena od matrice T dopisivanjem poslednje kolone i poslednje vrste, na način da se očuva Toeplitz-ova struktura matrice. Element y je potrebno odrediti iz uslova da je rang matrica T i T_{ext} isti. Na osnovu (54) za singularno proširenje važi $\text{rang}(T_{\text{ext}}) = M + 1$. Na osnovu teoreme o rangu i defektu matrice, za matricu T_{ext} višestrukost sopstvene vrednosti koja je jednaka nuli iznosi

$$n_{\text{ext}} = 2M + 2 - \text{rang}(T_{\text{ext}}) = M + 1. \quad (56)$$

Uvedimo pomoćnu matricu

$$S_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-1} & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & t_{2M-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & t_{2M-3} & 0 & t_{2M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{2M-1} & 0 & t_{2M-3} & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_{2M-1} & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ y & 0 & t_{2M-1} & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

koja se dobija od matrice T_{ext} zamenom prvog elementa $-t_0$ sa 0. Očigledno je $T_{\text{ext}} = S_{\text{ext}} - t_0 I$. Iz višestrukosti $n_{\text{ext}} = M + 1$ sopstvene vrednosti jednake nuli matrice T_{ext} , sledi da matrica S_{ext} ima sopstvenu vrednost jednaku t_0 višestrukosti $n_{\text{ext}} = M + 1$. Može se pokazati (korišćenjem Newton-ovih identiteta koji povezuju koeficijente karakterističnog polinoma sa tragovima stepena matrice) da karakteristični polinom matrice S_{ext} sadrži samo članove sa parnim stepenima, tj. da je oblika

$$\det(S_{\text{ext}} - \lambda I) = \lambda^{2M+2} + \beta'_2 \lambda^{2M} + \dots + \beta'_{2M} \lambda^2 + \beta'_{2M+2}. \quad (58)$$

Iz simetrije matrice S_{ext} , sledi da su sve njene sopstvene vrednosti realne. Iz (58) sledi da se one pojavljuju u parovima $\pm \lambda$. S obzirom da matrica S_{ext} ima jednu sopstvenu vrednost višestrukosti $M + 1$, iz (58) direktno sledi da matrica S_{ext} ima samo dve sopstvene vrednosti, obe višestrukosti $M + 1$. Te sopstvene vrednosti su t_0 i $-t_0$. Uvedimo normalizovanu matricu

$$S_{\text{ext}}^{\text{norm}} = \frac{1}{t_0} S_{\text{ext}}. \quad (59)$$

Elementi $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ su

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, M, \\ s_1 &= 1/t_0, \\ s_{2k+1} &= t_{2k+1}/t_0, & k &= 1, \dots, M-1, \\ s_{2M+1} &= y/t_0. \end{aligned} \quad (60)$$

Matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ ima samo dve sopstvene vrednosti $\mu_r \in \{1, -1\}$, $r = 0, 1, \dots, 2M + 1$, obe višestrukosti $M + 1$. Prema tome, osim što je simetrična Toeplitz-ova, matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ je takođe i ortogonalna. U radu [31] je dokazano da su sve ortogonalne simetrične Toeplitz-ove matrice ili ortogonalne simetrične ciklične (cirkularne), ili ortogonalne simetrične koso-ciklične matrice.

3.1.1.4. Kratak pregled simetričnih cikličnih i simetričnih koso-cikličnih matrica parnog reda

U ovom odeljku je dat kratak pregled relacija koje povezuju elemente i sopstvene vrednosti simetričnih cikličnih i simetričnih koso-cikličnih matrica parnog reda.

Za elemente simetrične ciklične matrice reda $2M + 2$

$$C_{2M+2} = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{M+1}, c_M, \dots, c_2, c_1), \quad (61)$$

važi

$$c_{2M+2-p} = c_p, \quad p = 1, \dots, M. \quad (62)$$

Elementi matrice (61) mogu se odrediti ako su poznate sopstvene vrednosti μ_r , $r = 0, 1, \dots, M+1$, kao [32]

$$c_p = \frac{1}{2(M+1)} \left[\mu_0 + (-1)^p \mu_{M+1} + 2 \sum_{r=1}^M \mu_r \cos \frac{rp\pi}{M+1} \right], \quad p = 0, 1, \dots, M+1. \quad (63)$$

Obrnuto, sopstvene vrednosti matrice (61) mogu se odrediti iz njenih elemenata [32], [33]

$$\mu_r = c_0 + (-1)^r c_{M+1} + 2 \sum_{p=1}^M c_p \cos \frac{pr\pi}{M+1}, \quad r = 0, 1, \dots, M+1, \quad (64)$$

$$\mu_{2M+2-r} = \mu_r, \quad r = 1, \dots, M. \quad (65)$$

Ciklične matrice C_{2M+2} reda $2M+2$ imaju M dvostrukih sopstvenih vrednosti i dve proste sopstvene vrednosti: μ_0 i μ_{M+1} [33].

Za elemente simetrične koso-ciklične matrice reda $2M+2$

$$Q_{2M+2} = \text{scirc}(q_0, q_1, \dots, q_M, 0, -q_M, \dots, -q_2, -q_1), \quad (66)$$

važi

$$q_{2M+2-p} = -q_p, \quad p = 1, \dots, M. \quad (67)$$

Elementi matrice (66) mogu se odrediti ako su poznate sopstvene vrednosti μ_r , $r = 0, 1, \dots, M$, kao [34]

$$q_p = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \mu_r \cos \frac{p(2r+1)\pi}{2(M+1)}, \quad p = 0, 1, \dots, M+1. \quad (68)$$

Primititi da $q_{M+1} = 0$ (videti takođe (66)). Obrnuto, sopstvene vrednosti matrice (66) mogu se odrediti iz njenih elemenata [34]

$$\mu_r = q_0 + 2 \sum_{p=1}^M q_p \cos \frac{p(2r+1)\pi}{2(M+1)}, \quad r = 0, 1, \dots, M, \quad (69)$$

$$\mu_{2M+1-r} = \mu_r, \quad r = 0, \dots, M. \quad (70)$$

Koso-ciklične matrice Q_{2M+2} reda $2M+2$ imaju $M+1$ dvostrukih sopstvenih vrednosti [33].

3.1.1.5. Određivanje tipa matrice $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$

U ovom odeljku odredićemo kada je matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ ciklična, a kada koso-ciklična.

Razmotrićemo dva slučaja, koji odgovaraju različitim parnostima broja M : i) M je paran broj i ii) M je neparan broj. Pokazaćemo da matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ nije koso-ciklična kada je M paran broj i da nije ciklična kada je M neparan broj. S obzirom da je matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ ili ciklična ili koso-ciklična, sledi da je matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ ortogonalna simetrična ciklična matrica kada je M paran broj (slučaj i)) i ortogonalna simetrična koso-ciklična matrica kada je M neparan broj (slučaj ii)).

i) M je paran broj. Prvi element q_0 i sopstvene vrednosti simetrične koso-ciklične matrice, na osnovu (68), zadovoljavaju relaciju $(M+1)q_0 = \sum_{r=0}^M \mu_r$. Za parno M , u sumi figuriše neparan broj sabiraka od kojih je svaki jednak ili 1 ili -1, iz čega sledi $\sum_{r=0}^M \mu_r \neq 0$, a samim tim i $q_0 \neq 0$. S obzirom da je $s_0 = 0$ (videti (60)), zaključuje se da matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ nije koso-ciklična za parno M . Prema tome, matrica je ciklična oblika

$$S_{\text{ext}}^{\text{norm}} = \text{circ}(0, s_1, 0, s_3, 0, \dots, s_{M-1}, 0, s_{M+1}, 0, s_{M-1}, \dots, 0, s_3, 0, s_1), \quad \text{parno } M. \quad (71)$$

Iz $s_{2M+1} = s_1$, $s_1 = 1/t_0$ i $s_{2M+1} = y/t_0$, sledi da se singularno proširenje (57) dobija za $y = 1$.

ii) M je neparan broj. Uvrštavanje $c_{2k} = s_{2k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)/2$ (primititi da je $c_0 = 0$ i $c_{M+1} = 0$) u (64), vodi ka $\mu_0 = -\mu_{M+1}$. Iz $\mu_0 = -\mu_{M+1}$ za neparno M važi $\mu_0 + (-1)^{M+1} \mu_{M+1} = 0$. Uvrštavanjem $\mu_0 + (-1)^{M+1} \mu_{M+1} = 0$ u (63) sledi da prvi element c_0 zadovoljava relaciju $(M+1)c_0 = \sum_{r=1}^M \mu_r$. Za neparno M , u sumi figuriše neparan broj sabiraka od kojih je svaki jednak ili 1 ili -1, iz čega sledi $\sum_{r=1}^M \mu_r \neq 0$, a samim tim i $c_0 \neq 0$, a to je kontradikcija. Zaključuje se da matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ nije ciklična kada je M neparno. Sledi da je matrica koso-ciklična oblika

$$S_{\text{ext}}^{\text{norm}} = \text{scirc}(0, s_1, 0, s_3, 0, \dots, 0, s_M, 0, -s_M, 0, \dots, 0, -s_3, 0, -s_1), \quad \text{neparno } M. \quad (72)$$

Iz $s_{2M+1} = -s_1$, $s_1 = 1/t_0$ i $s_{2M+1} = y/t_0$, sledi da se singularno proširenje (57) dobija za $y = -1$.

3.1.1.6. Elementi matrice $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$

U ovom odeljku pokazaćemo da su elementi matrice $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ opisani sa

$$s_{2k+1} = (-1)^k \left[(M+1) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \lfloor M/2 \rfloor, \quad (73)$$

gde $\lfloor M/2 \rfloor$ označava najveći ceo broj koji nije veći od $M/2$.

Da bismo dokazali (73), primetimo da iz $s_1 = 1/t_0$, (37), (27), (23) i (7) sledi

$$s_1 \geq \left[(M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}. \quad (74)$$

U okviru dokaza pokazaćemo da

$$s_1 \leq \left[(M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}. \quad (75)$$

Očigledno je da relacije (74) i (75) mogu biti istovremeno ispunjene ako i samo ako je

$$s_1 = \left[(M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}. \quad (76)$$

Za izvođenje izraza (73), korišćeni su identiteti [25]

$$1 + 2 \sum_{r=1}^{M/2} \cos 2r\nu = \frac{\sin(M+1)\nu}{\sin \nu}, \quad \text{parno } M, \quad (77)$$

$$2 \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \cos(2r+1)\nu = \frac{\sin(M+1)\nu}{\sin \nu}, \quad \text{neparno } M. \quad (78)$$

Primetiti da su desne strane izraza (77)-(78) jednake. Uvrštavanjem $\nu = \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)}$ u (77)-(78) dobija se

$$1 + 2 \sum_{r=1}^{M/2} \cos 2r \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)} = (-1)^k \left[\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}, \quad \text{parno } M, \quad (79)$$

$$2 \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \cos(2r+1) \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)} = (-1)^k \left[\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(M+1)} \right]^{-1}, \quad \text{neparno } M. \quad (80)$$

U toku dokazivanja razlikuju se dva slučaja koji odgovaraju različitoj parnosti broja M .

i) M je paran broj. Za parno M , matrica $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ je ortogonalna simetrična ciklična matrica čiji su elementi na parnim pozicijama jednaki nuli $s_{2k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, M/2$. Uvrštavanjem $c_{2k} = s_{2k} = 0$, $c_{2k+1} = s_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, M/2$, u (64) dobija se

$$\mu_r = (-1)^r s_{M+1} + 2 \sum_{k=0}^{M/2} s_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)r\pi}{M+1}, \quad r = 0, 1, \dots, M. \quad (81)$$

S obzirom da je M parno, iz (81) sledi

$$\mu_{M+1-r} = -\mu_r, \quad r = 0, \dots, M/2. \quad (82)$$

Iz (82) i (63) se dobija

$$s_{2k+1} = \frac{1}{M+1} \left[\mu_0 + 2 \sum_{r=1}^{M/2} \mu_r \cos \frac{r(2k+1)\pi}{M+1} \right], \quad k = 0, 1, \dots, M/2. \quad (83)$$

Za $k = 0$ izraz (83) postaje

$$s_1 = \frac{1}{M+1} \left[\mu_0 + 2 \sum_{r=1}^{M/2} \mu_r \cos \frac{r\pi}{M+1} \right]. \quad (84)$$

Iz $\cos r\pi/(M+1) > 0$ za $r = 1, \dots, M/2$ sledi da se maksimalna vrednost izraza (84) dobija za $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{M/2} = 1$, iz čega dalje sledi

$$s_1 \leq \frac{1}{M+1} \left[1 + 2 \sum_{r=1}^{M/2} \cos \frac{r\pi}{M+1} \right]. \quad (85)$$

Uvrštavanjem $k=0$ u (79) i rezultujuće relacije u (85) dobija se (75). Iz (75) i (74) sledi (76). Osim toga, iz (76) i (84) sledi

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{M/2} = 1, \quad \text{parno } M. \quad (86)$$

Uvrštavanje (86) u (83), uz korišćenje (79) vodi ka (73). Time je dokazana relacija (73) za parno M .

ii) M je neparan broj. Za neparno M , $S_{\text{ext}}^{\text{norm}}$ je ortogonalna simetrična koso-ciklična matrica čiji su elementi na parnim pozicijama jednaki nuli, $s_{2k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, (M+1)/2$. Uvrštavanjem $q_{2k} = s_{2k} = 0$, $q_{2k+1} = s_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)/2$, u (69) dobija se

$$\mu_r = 2 \sum_{k=0}^{(M-1)/2} s_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)(2r+1)\pi}{2(M+1)}, \quad r = 0, 1, \dots, M. \quad (87)$$

S obzirom da je M neparno, iz (87) sledi

$$\mu_{M-r} = -\mu_r, \quad r = 0, \dots, (M-1)/2. \quad (88)$$

Iz (88) i (68) se dobija

$$s_{2k+1} = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \mu_r \cos \frac{(2r+1)(2k+1)\pi}{2(M+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1)/2. \quad (89)$$

Za $k=0$ izraz (89) postaje

$$s_1 = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \mu_r \cos \frac{(2r+1)\pi}{2(M+1)}. \quad (90)$$

Iz $\cos(2r+1)\pi/(2M+2) > 0$ za $r = 1, \dots, (M-1)/2$ sledi da se maksimalna vrednost izraza (90) dobija za $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{(M-1)/2} = 1$, iz čega dalje sledi

$$s_1 \leq \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \cos \frac{(2r+1)\pi}{2(M+1)}. \quad (91)$$

Uvrštavanjem $k=0$ u (80) i rezultujuće relacije u (91) dobija se (75). Iz (75) i (74) sledi (76). Osim toga, iz (76) i (90) sledi

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{(M-1)/2} = 1, \quad \text{neparno } M. \quad (92)$$

Uvrštavanje (92) u (89), uz korišćenje (80) vodi ka (73). Time je dokazana relacija (73) za neparno M .

3.1.1.7. Koeficijent uz osnovni harmonik optimalnog signala

Podsetimo se da na osnovu (37) i (60) važi $\gamma_{\text{even}} = t_0 = 1/s_1$. Uvrštavanjem (76) dobija se da je maksimalna vrednost koeficijenta uz osnovni harmonik $a_1^* = \gamma_{\text{even}}$ nenegativnog signala $w_{\text{even}}(\tau)$ tipa (6) jednaka

$$a_1^* = (M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)}. \quad (93)$$

Time je dokazano da postoji nenegativan signal, čiji koeficijent uz osnovni harmonik zadovoljava jednakost u izrazu (7).

3.1.2. Koeficijenti optimalnog signala sa osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima

Označimo optimalan signal tipa (6) sa $w_{\text{even}}^*(\tau)$. Njegov koeficijent uz osnovni harmonik jednak je a_1^* (izraz (93)). S obzirom da je $w_{\text{even}}^*(\tau)$ nenegativan, iz (13) sledi da $w_{\text{even}}^*(\tau)$ ima nule u tačkama τ_r koje su date izrazom (8). Označimo sa

$$\alpha = \frac{\pi}{2(M+1)}. \quad (94)$$

Tada se nule optimalnog signala τ_r , $r = 1, \dots, M+1$, mogu napisati u obliku

$$\tau_r = \frac{\pi}{2} + (2r-1)\alpha, \quad r = 1, \dots, M+1. \quad (95)$$

Iz koeficijenta a_1^* i nula (95) optimalnog signala $w_{\text{even}}^*(\tau)$ mogu se odrediti i svi ostali koeficijenti na

način opisan u nastavku ovog odeljka.

Množenjem $w_{\text{even}}^*(\tau_r) = 0$ sa $\cos 2q\tau_r$, $q = 1, \dots, M$, dobija se

$$\cos 2q\tau_r + a_1^* \cos 2q\tau_r \cos \tau_r + \sum_{m=1}^M a_{2m}^* \cos 2m\tau_r \cos 2q\tau_r = 0, \quad r = 1, \dots, M+1, \quad (96)$$

odnosno

$$2 \cos 2q\tau_r + a_1^* (\cos(2q+1)\tau_r + \cos(2q-1)\tau_r) + \sum_{m=1}^M a_{2m}^* (\cos(2m+2q)\tau_r + \cos(2m-2q)\tau_r) = 0, \quad r = 1, \dots, M+1. \quad (97)$$

Kada se za isto q , $q = 1, \dots, M$, saberu sve jednačine (97) dobija se sistem jednačina

$$2 \sum_{r=1}^{M+1} \cos 2q\tau_r + a_1^* \left(\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2q-1)\tau_r + \sum_{r=1}^{M+1} \cos(2q+1)\tau_r \right) + \sum_{m=1}^M a_{2m}^* \left(\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2m-2q)\tau_r + \sum_{r=1}^{M+1} \cos(2m+2q)\tau_r \right) = 0, \quad q = 1, \dots, M. \quad (98)$$

Uvrštavanjem

$$\sum_{r=1}^{M+1} \cos 2p\tau_r = (-1)^p \sum_{r=1}^{M+1} \cos((2r-1)2p\alpha) = \begin{cases} M+1, & p=0, \\ 0 & p=1, \dots, M, \\ -(-1)^{M+1}(M+1), & p=M+1, \end{cases} \quad (99)$$

$$\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2p-1)\tau_r = (-1)^p \sum_{r=1}^{M+1} \sin((2r-1)(2p-1)\alpha) = \frac{(-1)^p}{\sin(2p-1)\alpha}, \quad (100)$$

u (98) dobija se

$$a_{2q}^* - (-1)^{M+1} a_{2(M+1-q)}^* = \frac{a_1^* (-1)^{q+1}}{M+1} \left(\frac{1}{\sin(2q-1)\alpha} - \frac{1}{\sin(2q+1)\alpha} \right), \quad q = 1, \dots, M. \quad (101)$$

Lako se vidi da sistem (101) sadrži samo $\lfloor M/2 \rfloor$ nezavisnih jednačina (prvih $\lfloor M/2 \rfloor$ jednačina je nezavisno). (Za neparno M i $q = (M+1)/2$ jednačina (101) se svodi na $0=0$).

Preostale jednačine za određivanje nepoznatih koeficijenata mogu se dobiti iz uslova da su nule nenegativnog optimalnog signala $w_{\text{even}}^*(\tau)$ dvostruke. To znači da su to ujedno i nule prvog izvoda, tj.

$$w_{\text{even}}^{*'}(\tau_r) = 0, \quad r = 1, \dots, M+1. \quad (102)$$

Množenjem jednačina (102) sa $\sin 2q\tau_r$, $q = 1, \dots, M$, dobija se

$$a_1^* \sin \tau_r \sin 2q\tau_r + \sum_{m=1}^M 2ma_{2m}^* \sin 2m\tau_r \sin 2q\tau_r = 0, \quad r = 1, \dots, M+1, \quad (103)$$

odnosno

$$a_1^* (\cos(2q-1)\tau_r - \cos(2q+1)\tau_r) + \sum_{m=1}^M 2ma_{2m}^* (\cos(2m-2q)\tau_r - \cos(2m+2q)\tau_r) = 0, \quad r = 1, \dots, M+1. \quad (104)$$

Kada se za isto q , $q = 1, \dots, M$, saberu sve jednačine (104) dobija se

$$a_1^* \left(\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2q-1)\tau_r - \sum_{r=1}^{M+1} \cos(2q+1)\tau_r \right) + \sum_{k=1}^M 2ma_{2m}^* \left(\sum_{r=1}^{M+1} \cos(2m-2q)\tau_r - \sum_{r=1}^{M+1} \cos(2m+2q)\tau_r \right) = 0, \quad q = 1, \dots, M. \quad (105)$$

Na osnovu (99) i (100), iz prethodnog izraza sledi

$$2qa_{2q}^* + (-1)^{M+1} 2(M+1-q)a_{2(M+1-q)}^* = \frac{a_1^* (-1)^{q+1}}{M+1} \left(\frac{1}{\sin(2q-1)\alpha} + \frac{1}{\sin(2q+1)\alpha} \right), \quad q = 1, \dots, M. \quad (106)$$

Sistem (106) sadrži $\lfloor (M+1)/2 \rfloor$ nezavisnih jednačina (prvih $\lfloor (M+1)/2 \rfloor$ jednačina je nezavisno).

Koeficijenti optimalnog signala dobijaju se iz (101) i (106) i mogu se napisati kao

$$a_{2q}^* = \frac{(-1)^{q+1} a_1^*}{2(M+1)^2} \left(\frac{2(M+1) - (2q-1)}{\sin(2q-1)\alpha} - \frac{2(M+1) - (2q+1)}{\sin(2q+1)\alpha} \right), \quad q = 1, \dots, M, \quad (107)$$

ili kao

$$a_{2(M+1-q)}^* = \frac{(-1)^{M-q} a_1^*}{2(M+1)^2} \left(\frac{2q-1}{\sin(2q-1)\alpha} - \frac{2q+1}{\sin(2q+1)\alpha} \right), \quad q = 1, \dots, M, \quad (108)$$

gde su a_1^* i α dati izrazima (93) i (94), respektivno. Optimalni signali su potpuno određeni sa koeficijentima uz osnovni (93) i više parne harmonike (107) (ili (108) umesto (107)). Koeficijent a_1^* je izražen u funkciji broja viših uzastopnih parnih harmonika M , dok su koeficijenti a_{2q}^* izraženi u funkciji M i reda harmonika.

3.1.2.1. Primeri optimalnih signala

Određimo prvo čemu teži optimalan signal kada $M \rightarrow \infty$. Za $M \rightarrow \infty$, koeficijent a_1^* teži

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_1^* = \lim_{M \rightarrow \infty} (M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)} = \frac{\pi}{2} \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2(M+1)} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sinc}(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (109)$$

gde je $\operatorname{sinc}(x) = (\sin x)/x$. Koeficijenti a_{2q}^* , $q = 1, \dots, M$, mogu se napisati u obliku

$$a_{2q}^* = \frac{2a_1^* (-1)^{q+1}}{\pi} \left[\frac{1}{(2q-1) \operatorname{sinc}(2q-1)\alpha} - \frac{1}{(2q+1) \operatorname{sinc}(2q+1)\alpha} - \frac{1}{2(M+1)} \left(\frac{1}{\operatorname{sinc}(2q-1)\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sinc}(2q+1)\alpha} \right) \right]. \quad (110)$$

Za $M \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, $\lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{sinc}(2q \pm 1)\alpha = 1$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_{2q}^* = (-1)^{q+1} \left(\frac{1}{2q-1} - \frac{1}{2q+1} \right) \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2a_1^*}{\pi}, \quad (111)$$

što je na osnovu (109) jednako

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_{2q}^* = \frac{2(-1)^{q+1}}{4q^2 - 1}, \quad q = 1, \dots, M. \quad (112)$$

Iz (109) i (112) sledi

$$\lim_{M \rightarrow \infty} w_{\text{even}}^*(\tau) = 1 + \frac{\pi}{2} \cos \tau + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q+1}}{4q^2 - 1} \cos 2q\tau. \quad (113)$$

Izraz (113) je identičan razvoju u Furijeov red tzv. polusinusoidalnog signala (eng. half-sine waveform) koji je na osnovnoj periodi opisan sa

$$w_{\text{half-sine}}(\tau) = \begin{cases} \pi \cos \tau, & |\tau| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\tau| \leq \pi. \end{cases} \quad (114)$$

Izrazi (115)-(118) prikazuju optimalne signale $w_{\text{even}}^*(\tau)$ za $M = 1, \dots, 4$. Optimalni signali za $M = 1$ i $M = 2$ su poznati od ranije [9]. Optimalni signali $w_{\text{even}}^*(\tau)$ za $M = 3$ i $M = 4$ su prvi put prikazani u ovom tehničkom rešenju. Njihovi koeficijenti su određeni iz izraza (93) i (107).

Za $M = 1$, optimalan signal glasi (nule su u $3\pi/4$ i $5\pi/4$)

$$w_{\text{even}}^*(\tau) = 1 + \sqrt{2} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos 2\tau. \quad (115)$$

Za $M = 2$, optimalan signal glasi (nule su u $2\pi/3$, π i $4\pi/3$)

$$w_{\text{even}}^*(\tau) = 1 + \frac{3}{2} \cos \tau + \frac{7}{12} \cos 2\tau - \frac{1}{12} \cos 4\tau. \quad (116)$$

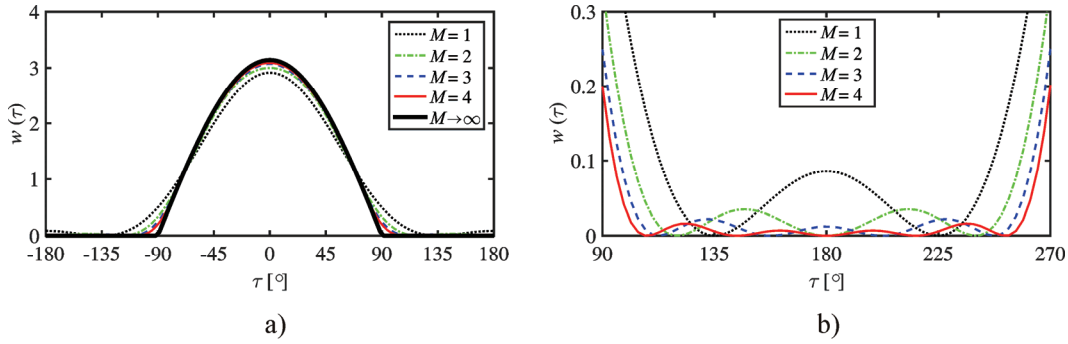
Za $M = 3$, optimalan signal glasi (nule su u $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$ i $11\pi/8$)

$$w_{\text{even}}^*(\tau) = 1 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \tau + \frac{12 - 5\sqrt{2}}{8} \cos 2\tau - \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \cos 4\tau + \frac{3\sqrt{2} - 4}{8} \cos 6\tau. \quad (117)$$

Za $M = 4$, optimalan signal glasi (nule su u $6\pi/10$, $8\pi/10$, π , $12\pi/10$, i $14\pi/10$)

$$w_{\text{even}}^*(\tau) = 1 + \frac{5(\sqrt{5} - 1)}{4} \cos \tau + \frac{7\sqrt{5} - 3}{20} \cos 2\tau - \frac{47 - 19\sqrt{5}}{40} \cos 4\tau + \frac{11\sqrt{5} - 23}{40} \cos 6\tau - \frac{7 - 3\sqrt{5}}{20} \cos 8\tau. \quad (118)$$

Na slici 1.a prikazani su optimalni signali $w_{\text{even}}^*(\tau)$ za $M=1, \dots, 4$, kao i $w_{\text{half-sine}}(\tau)$. Na slici 1.b prikazan je onaj deo osnovne periode na kojem se nalaze nule optimalnih signala za $M=1, \dots, 4$.



Slika 1. a) Primeri optimalnih signala sa vremenski konstantnom komponentom, osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima, b) uvećan detalj koji prikazuje nule signala.

3.1.3. Numerička verifikacija

U ovom odeljku opisana je nezavisna numerička verifikacija analitičkih izraza za koeficijente optimalnog signala $w_{\text{even}}^*(\tau)$ koji su izvedeni u prethodnom delu ovog tehničkog rešenja. Numerički pristup je baziran na određivanju maksimuma minimum funkcije. Vrednosti koeficijenata optimalnog signala $w_{\text{even}}^*(\tau)$ koje su dobijene numeričkim putem su u saglasnosti sa vrednostima koje se mogu izračunati iz analitičkih izraza izvedenih u ovom tehničkom rešenju.

Za opisivanje numeričkog postupka, primetiti da se signali tipa (6) mogu napisati u obliku

$$w_{\text{even}}(\tau) = 1 + a_1 \left(\cos \tau + \sum_{m=1}^M \alpha_{2m} \cos(2m\tau) \right) = 1 + a_1 f_M(\tau), \quad (119)$$

gde su $\alpha_{2m} = a_{2m}/a_1$, $m=1, \dots, M$ i

$$f_M(\tau) = \cos \tau + \sum_{m=1}^M \alpha_{2m} \cos(2m\tau). \quad (120)$$

U ovoj formulaciji, određivanje maksimalne vrednosti koeficijenta uz osnovni harmonik nenegativnog signala tipa $w_{\text{even}}(\tau)$ je sveden na ekvivalentan problem određivanja maksimalne vrednosti koeficijenta a_1 koja zadovoljava

$$1 + a_1 f_M(\tau) \geq 0. \quad (121)$$

Označimo sa

$$F_M(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M}) = \min_{\tau} f_M(\tau), \quad (122)$$

minimum funkciju pridruženu funkciji $f_M(\tau)$. Na osnovu (121), a_1 i $F_M(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})$ zadovoljavaju relaciju

$$1 + a_1 F_M(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M}) \geq 0. \quad (123)$$

Za zadatu M -torku $(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})$ postoji jedinstvena najveća vrednost koeficijenta a_1 , koju ćemo označiti sa $A_1(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})$. Lako se vidi da za tu najveću vrednost, relacija (123) postaje jednakost, što se može formulisati kao

$$A_1(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M}) = -\frac{1}{F_M(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})} = -\frac{1}{\min_{\tau} f_M(\tau)}. \quad (124)$$

Neka je sa A_1^* označena maksimalnu vrednost od $A_1(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})$. Ta maksimalna vrednost se može odrediti na sledeći način

$$A_1^* = \max_{\alpha_2, \dots, \alpha_{2M}} [A_1(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})] = -\frac{1}{\max_{\alpha_2, \dots, \alpha_{2M}} \left[\min_{\tau} f_M(\tau) \right]}. \quad (125)$$

Na osnovu prethodnog, A_1^* je maksimalna moguća vrednost koeficijenta a_1 signala (119).

Tipično, minimum funkcija nije diferencijabilna funkcija (npr. [35]-[37]). Prema tome, A_1^* se ne može odrediti pristupom koji je baziran na određivanju kritičnih tačaka funkcije. Zbog toga se za

određivanje maksimalne vrednosti koeficijenta a_1 mora koristiti drugačiji pristup.

U nastavku ovog odeljka, optimizacioni problem opisan sa (125) je tretiran numerički.

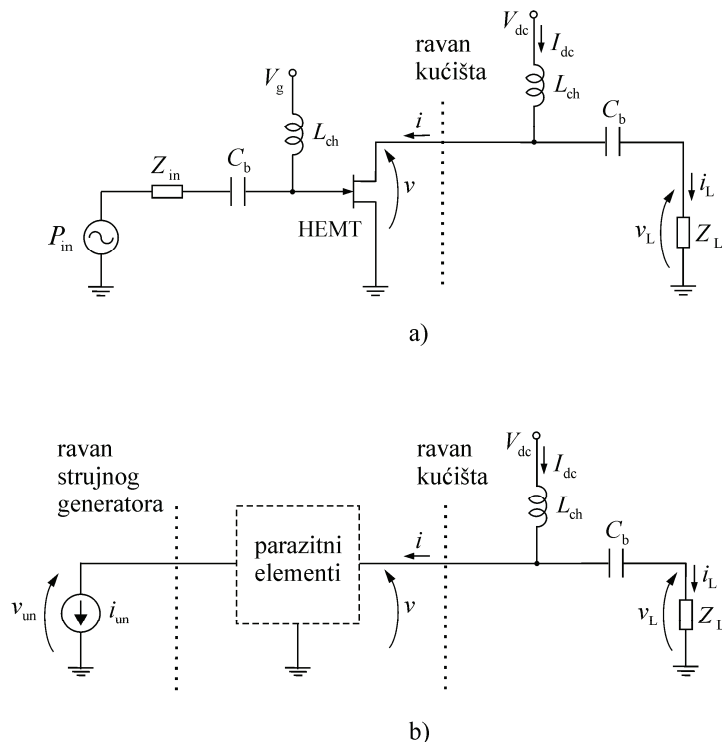
Lako se vidi da tačnost parametara koji se dobijaju opisanom numeričkom procedurom zavisi od koraka τ_{step} za τ , kao i izabrane mreže u M – dimenzionalnom parametarskom prostoru $(\alpha_2, \dots, \alpha_{2M})$.

Na primer, za $M=3$, $\alpha_{2,\text{step}} = \alpha_{4,\text{step}} = \alpha_{6,\text{step}} = 10^{-4}$, $\tau \in [\pi/2, \pi]$ (zbog simetrije kosinusnog signala i činjenice da $\cos \tau \leq 0$ za $\tau \in [\pi/2, \pi]$) i $\tau_{\text{step}} = 10^{-4}$ dobili smo $A_1^* = 1,5307$, $\alpha_2^* = 0,4022$, $\alpha_4^* = -0,0681$, i $\alpha_6^* = 0,0195$. Odgovarajuće numeričke vrednosti koeficijenata optimalnog signala su $a_1 = 1,5307$, $a_2 = 0,6157$, $a_4 = -0,1042$, i $a_6 = 0,0298$. Prve četiri značajne cifre se poklapaju sa vrednostima koje se mogu izračunati iz analitičkih izraza za koeficijente optimalnog signala za $M=3$ (videti npr. (117)).

Kao drugi primer, za $M=4$, $\alpha_{2,\text{step}} = 10^{-3}$, $\alpha_{4,\text{step}} = 5 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_{6,\text{step}} = 2 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{8,\text{step}} = 10^{-4}$, $\tau \in [\pi/2, \pi]$ i $\tau_{\text{step}} = 10^{-3}$ dobili smo $A_1^* = 1,545$, $\alpha_2^* = 0,409$, $\alpha_4^* = -0,073$, $\alpha_6^* = 0,0258$ i $\alpha_8^* = -0,009$. Odgovarajuće numeričke vrednosti koeficijenata optimalnog signala su $a_1 = 1,545$, $a_2 = 0,632$, $a_4 = -0,113$, $a_6 = 0,0399$ i $a_8 = -0,0139$. Prve četiri značajne cifre se poklapaju sa vrednostima koje se mogu izračunati iz analitičkih izraza za koeficijente optimalnog signala za $M=4$ (videti npr. (118)).

3.2. Maksimalna efikasnost klase-F i inverzne klase-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika

Električna šema pojačavača snage prikazana je na slici 2.a. Na slici 2.b je prikazana ravan strujnog generatora, kao i ravan kućišta. Virtuelni unutrašnji (eng. intrinsic) krajevi u ravni strujnog generatora su smešteni na samom aktivnom elementu. Signali na strujnom generatoru se nazivaju unutrašnji signali, i_{un} i v_{un} , i na njih ne utiču paraziti elementi. Klasa rada pojačavača snage se utvrđuje na osnovu signala u ravni strujnog generatora [19]. U nastavku ovog odeljka posmatrani su unutrašnji signali i_{un} i v_{un} na strujnom generatoru.



Slika 2. a) Električna šema pojačavača snage, b) električna šema izlaznog dela kola pojačavača snage. Ravan strujnog generatora i ravan kućišta tranzistora označene su tačkastim linijama.

Označimo signal, koji osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži i sve više neparne harmonike do $(2K+1)$ – vog sa $w_{\text{odd}}(\tau)$,

$$w_{\text{odd}}(\tau) = 1 - b_1 \cos \tau - \sum_{k=1}^K b_{(2k+1)} \cos(2k+1)\tau, \quad (126)$$

gde τ označava ωt , $b_1 > 0$ i $b_{(2K+1)} \neq 0$.

Pretpostavimo za F-klasu pojačavača sa konačnim brojem harmonika da su signali na strujnom generatoru opisani sa

$$\begin{aligned} i_M(\tau) &= I_{dc} w_{even}(\tau) \geq 0, \\ v_K(\tau) &= V_{dc} w_{odd}(\tau) \geq 0, \end{aligned} \quad (127)$$

gde je $I_{dc} > 0$, $V_{dc} > 0$, a $w_{even}(\tau)$ i $w_{odd}(\tau)$ su dati sa (6) i (126), respektivno. Za dualnu klasu, inverznu klasu-F sa konačnim brojem harmonika, pretpostavimo da su signali na strujnom generatoru opisani sa

$$\begin{aligned} i_K(\tau) &= I_{dc} w_{odd}(\tau) \geq 0, \\ v_M(\tau) &= V_{dc} w_{even}(\tau) \geq 0. \end{aligned} \quad (128)$$

Efikasnost η pojačavača snage može se izračunati iz osnovnih parametara γ_I i γ_V strujnog i naponskog signala [1] korišćenjem relacije $\eta = \gamma_I \gamma_V / 2$. Za klasu-F pojačavača snage je $\gamma_I = a_1$ i $\gamma_V = b_1$. Za inverznu klasu-F pojačavača snage je $\gamma_I = b_1$ i $\gamma_V = a_1$. Označimo sa $\gamma_{even}^*(M)$ maksimalnu vrednost koeficijenta a_1 signala $w_{even}(\tau)$, a sa $\gamma_{odd}^*(K)$ maksimalnu vrednost koeficijenta b_1 signala $w_{odd}(\tau)$. U tom slučaju, maksimalna efikasnost klase-F sa konačnim brojem harmonika jednaka je

$$\eta_{max}(M, K) = \frac{1}{2} \gamma_{even}^*(M) \gamma_{odd}^*(K), \quad (129)$$

gde $\gamma_{even}^*(M)$ i $\gamma_{odd}^*(K)$ označavaju maksimalne vrednosti koeficijenata uz osnovni harmonik signala $w_{even}(\tau)$ i $w_{odd}(\tau)$, respektivno. Primetiti da je $\eta_{max}(M, K)$ ujedno i maksimalna efikasnost inverzne klase-F sa konačnim brojem harmonika. U inverznoj klasi-F signali su dualni, signal struje sadrži neparne harmonike, dok signal napona sadrži više parne harmonike.

Maksimalna vrednost koeficijenta $\gamma_{even}^*(M)$ je određena u ovom tehničkom rešenju, i na osnovu (93) ona iznosi

$$\gamma_{even}^*(M) = (M+1) \sin \frac{\pi}{2(M+1)}. \quad (130)$$

Na osnovu (109),

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_{even}^*(M) = \frac{\pi}{2}. \quad (131)$$

Maksimalna vrednost koeficijenta $\gamma_{odd}^*(K)$ iznosi [12]

$$\gamma_{odd}^*(K) = \frac{2}{(K+2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(K+2)}. \quad (132)$$

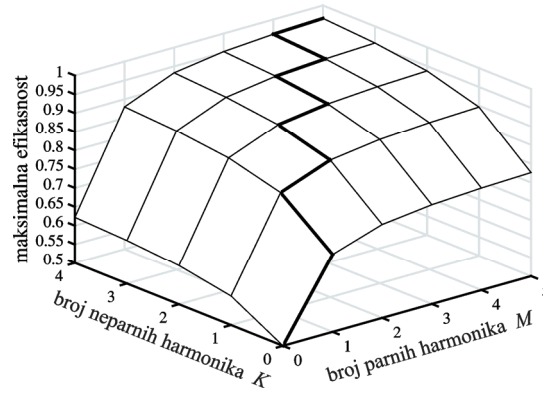
Kada $K \rightarrow \infty$, parametar $\gamma_{odd}^*(K)$ teži

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_{odd}^*(K) = \frac{4}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2(K+2)}}{\operatorname{sinc} \frac{\pi}{2(K+2)}} = \frac{4}{\pi}. \quad (133)$$

Na osnovu (129), (130) i (132), maksimalna efikasnost klase-F (inverzne klase-F) pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika jednaka je

$$\eta_{max}(M, K) = \frac{(M+1)}{(K+2)} \sin \frac{\pi}{2(M+1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(K+2)}. \quad (134)$$

Maksimalna efikasnost klase-F (inverzne klase-F) sa konačnim brojem harmonika data izrazom (134) u funkciji broja uzastopnih parnih harmonika M u signalu struje (napona) i broja uzastopnih neparnih harmonika K u signalu napona (struje), prikazana je na slici 3.



Slika 3. Maksimalna efikasnost klase-F i inverzne klase-F pojačavača snage.

Osim toga, iz (131) i (133) sledi da

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \eta_{\max}(M, K) = \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_{\text{even}}^*(M) \lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_{\text{odd}}^*(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi} = 1. \quad (135)$$

Sa beskonačno mnogo harmonika i u signalu struje i u signalu napona dobija se tzv. idealna klasa-F (inverzna klasa-F) čija je efikasnost jednaka 1.

Važan specijalan slučaj predstavlja pojačavač snage klase-F (inverzne klase-F) sa N harmonika. U tom slučaju signal struje (napona) sadrži parne harmonike do N -tog, dok signal napona (struje) sadrži neparne harmonike do N -tog. Razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od parnosti broja N .

i) N je paran broj. Tada je $M = N/2$, $K = N/2 - 1$, i iz (134) se dobija

$$\eta_{\max}(N) = \cos \frac{\pi}{N+2}, \quad \text{parno } N. \quad (136)$$

Primetiti da se ova maksimalna efikasnost poklapa sa maksimalnom efikasnošću (5) klase-C i inverzne klase-C sa N harmonika.

ii) N je neparan broj. Tada je $M = K = (N-1)/2$ i iz (134) se dobija

$$\eta_{\max}(N) = \frac{N+1}{N+3} \sin \frac{\pi}{N+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N+3}, \quad \text{neparno } N. \quad (137)$$

Maksimalna efikasnost koja odgovara klasi-F (inverznoj klasi-F) sa N harmonika označena je podebljanom cik-cak linijom na slici 3. Izračunate vrednosti maksimalne efikasnosti do $N=10$ za klasu-F, sa prikazanim harmonijskim sadržajem u signalima napona i struje, date su u tabeli 2. Za inverznu klasu-F potrebno je samo zameniti harmonijski sadržaj signala struje za signal napona i obrnuto.

Tabela 2. Maksimalna efikasnost klase-F pojačavača snage sa N harmonika.

N	Harmonici u $i(\tau)$	Harmonici u $v(\tau)$	η
1	1	1	$1/2 = 0,5000$
2	1,2	1	$\sqrt{2}/2 = 0,7071$
3	1,2	1,3	$\sqrt{2/3} = 0,8165$
4	1,2,4	1,3	$\sqrt{3}/2 = 0,8660$
5	1,2,4	1,3,5	$3(1+\sqrt{2})/8 = 0,9053$
6	1,2,4,6	1,3,5	$(\sqrt{2}+\sqrt{2})/2 = 0,9239$
7	1,2,4,6	1,3,5,7	$2\sqrt{(2-\sqrt{2})(5+2\sqrt{5})}/2 = 0,9422$
8	1,2,4,6,8	1,3,5,7	$\sqrt{2(5+\sqrt{5})}/4 = 0,9511$
9	1,2,4,6,8	1,3,5,7,9	$5(\sqrt{5}-1)(2+\sqrt{3})/24 = 0,9611$
10	1,2,4,6,8,10	1,3,5,7,9	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 = 0,9659$

Rezultat dobijen u ovom tehničkom rešenju omogućava određivanje još jedne maksimalne efikasnosti koja do sada nije bila poznata. Preciznije, to je maksimalna efikasnost klase-F (inverzne klase-F) pojačavača snage kada je signal napona (struje) u vidu povorke pravougaonih impulsa, dok signal struje (napona) osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži i uzastopne parne harmonike do $2M$ -tog. Signal u vidu povorke pravougaonih impulsa, osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži sve neparne harmonike (ovaj signal sadrži beskonačno mnogo neparnih harmonika i svi parni harmonici jednaki su nuli). Ova efikasnost može se odrediti kao granična vrednost efikasnosti (134) za $K \rightarrow \infty$,

$$\eta_{\max}(M) = \lim_{K \rightarrow \infty} \eta_{\max}(M, K) = \frac{2(M+1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2(M+1)} = \text{sinc} \frac{\pi}{2(M+1)}. \quad (138)$$

Dualan slučaj je kada je jedan od signala u strujno-naponskom paru polusinusoidalni signal (114). Polusinusoidalni signal, osim vremenski konstantne komponente i osnovnog harmonika, sadrži sve parne harmonike (ovaj signal sadrži beskonačno mnogo parnih harmonika i svi neparni harmonici osim osnovnog jednaki su nuli). U ovom slučaju, maksimalna efikasnost se takođe može dobiti kao granična vrednost efikasnosti (134) za $M \rightarrow \infty$. Ovim postupkom dobija se izraz (4).

3.3. Kako je realizovano tehničko rešenje i gde se primenjuje, odnosno koje su mogućnosti primene

Tehničko rešenje obuhvata analitičku metodu za određivanje optimalnih signala sa osnovnim i uzastopnim parnim harmonicima koji se javljaju u klasi-F i inverznoj klasi-F pojačavača snage. Koeficijenti optimalnih signala su određeni u analitičkom obliku u funkciji broja uzastopnih parnih harmonika i reda harmonika. Poznavanje optimalnih signala je omogućilo određivanje maksimalnih efikasnosti za klasu-F i inverznu klasu-F pojačavača snage sa konačnim brojem harmonika. To su ujedno i maksimalne efikasnosti kontinualne klase-F i kontinualne inverzne klase-F sa konačnim brojem harmonika. Do ovog tehničkog rešenja ove maksimalne efikasnosti nisu bile poznate.

Ostvareni rezultati u okviru ovog tehničkog rešenja su praktično primenljivi u procesu projektovanja pojačavača snage u klasi-F i inverznoj klasi-F, s obzirom da poznavanje optimalnih signala omogućava da dizajn pojačavača snage bude baziran na “waveform engineering”-u. Osim toga, ovi rezultati omogućavaju procenu kvaliteta ostvarenog dizajna kroz poređenje ostvarene i teorijski maksimalno dostižne efikasnosti, u zavisnosti od izabranog harmonijskog sadržaja u signalima napona i struje. Zbog toga je za projektovanje pojačavača snage važno poznavanje maksimalne efikasnosti za različite klase rada pojačavača.

Predloženo tehničko rešenje koriste istraživači sa Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu u aktivnostima koje se odnose na analizu pojačavača snage, kao i za dalja istraživanja.

U nastavku istraživanja biće ispitana mogućnost modifikacije opisane metode za određivanje optimalnih signala sa drugačijim harmonijskim sadržajem.

4. Literatura

- [1] F. H. Raab, “Maximum efficiency and output of class-F power amplifiers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 6, pp 1162-1165, 2001.
- [2] Y. Y. Woo, Y. Yang, B. Kim, “Analysis and experiments for high-efficiency class-F and inverse class-F power amplifiers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 54, no. 5, pp. 1969-1974, 2006.
- [3] J. H. Kim, G. D. Jo, J. H. Oh, Y. H. Kim, K. C. Lee and J. H. Jung, “Modeling and design methodology of high-efficiency class-F and class-F⁻¹ power amplifiers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 59, no. 1, pp. 153-165, 2011.
- [4] J. Moon, S. Jee, J. Kim, J. Kim and B. Kim, “Behaviors of class-F and class-F⁻¹ amplifiers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 60, no. 6, pp. 1937-1951, 2012.
- [5] A. Grebennikov, N. O. Sokal and M. J. Franco, *Switchmode RF Power Amplifiers*, Elsevier/Academic Press, San Diego, Calif, USA, 2nd edition, 2012.
- [6] A. Juhas and L. A. Novak, “Maximally flat waveforms with finite number of harmonics in class-F power amplifiers,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 169590, 9 pages, 2013.

- [7] S. Iguchi S, A. Saito, K. Watanabe, T. Sakurai and M. Takamiya, "Design method of class-F power amplifier with output power of 20 dBm and efficient dual supply voltage transmitter," *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, vol. 61, no. 10, pp. 2978-2986, 2014.
- [8] R. S. Pengelly, W. Pribble, and T. Smith, "Inverse class-F design using dynamic loadline GaN HEMT models to help designers optimize PA efficiency (Application Note)," *IEEE Microwave Magazine*, vol. 15, no. 6, pp. 134-147, 2014.
- [9] A. Juhas and L. A. Novak, "Closed form of optimal current waveform for class-F PA up to fourth harmonic," *Sadhana*, vol. 40, no. 2, pp. 425-436, 2015.
- [10] A. Juhas, S. Dautovic and L. A. Novak, "On optimal truncated biharmonic current waveforms for class-F and inverse class-F power amplifiers," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, Article ID 1390295, 19 pages, 2017.
- [11] F. H. Raab, "Class-E, class-C, and class-F power amplifiers based upon a finite number of harmonics," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 8, pp. 1462-1468, 2001.
- [12] J. D. Rhodes, "Output universality in maximum efficiency linear power amplifiers," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 31, no. 4, pp. 385-405, 2003.
- [13] A. Juhas and L. A. Novak, "Comments on "Class-E, Class-C, and Class-F Power Amplifier Based Upon a Finite Number of Harmonics"," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 57, pp. 1623-1625, June 2009.
- [14] M. Roberg and Z. Popović, "Analysis of high-efficiency power amplifiers with arbitrary output harmonic terminations," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 59, no. 8, pp. 2037-2048, 2011.
- [15] T. Canning, P. J. Tasker, and S. C. Cripps, "Continuous mode power amplifier design using harmonic clipping contours: theory and practice," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 62, no. 1, pp. 100-110, 2014.
- [16] A. Juhas and L. A. Novak, "General description of nonnegative waveforms up to second harmonic for power amplifier modelling," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, Article ID 709762, 18 pages, 2014.
- [17] A. Juhas and L. A. Novak, "Conflict set and waveform modelling for power amplifier design," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, Article ID 585962, 29 pages, 2015.
- [18] P. J. Tasker, "Practical waveform engineering," *IEEE Microwave Magazine*, vol. 10, no. 7, pp. 65-76, 2009.
- [19] P. J. Tasker and J. Benedikt, "Waveform inspired models and the harmonic balance emulator," *IEEE Microwave Magazine*, vol. 12, no. 2, pp. 38-54, 2011.
- [20] L. Fejer, "Über trigonometrische Polynome," (in German) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 146, pp. 53-82, 1916.
- [21] N. S. Fuzik, "Biharmonic modes of a tuned RF power amplifier," *Radiotekhnika*, vol. 25, no. 7, pp. 62-71, 1970 (Russian).
- [22] P. Colantonio, F. Giannini, G. Leuzzi and E. Limiti, "Class G approach for low-voltage, high-efficiency PA design," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 10, no. 6, pp. 366-378, 2000.
- [23] A. Dani and Z. Popović, "PA efficiency and linearity enhancement using external harmonic injection," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 60, no. 12, pp. 4097-4106, 2012.
- [24] D. M. Snider, "A theoretical analysis and experimental confirmation of the optimally loaded and overdriven RF power amplifiers," *IEEE Transaction on Electron Devices*, vol. 14, pp. 851-857, June 1967.
- [25] M. Abramowitch, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [26] Y. Genin, "A survey of the eigenstructure properties of finite Hermitian Topelitz matrice," *Integral Equations and Operator Theory*, vol. 10, no. 5, pp. 621-639, Sep. 1987.
- [27] D. Kalman, "A matrix proof of Newton's identities," *Mathematics Magazine*, vol. 73, no. 4, pp. 313-315, Oct. 2000.
- [28] D. W. Robinson, "A matrix application of Newton's identities," *The American Mathematical Monthly*, vol. 68, no. 4, pp. 367-369, Apr., 1961.
- [29] I. S. Iohvidov, *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms*, Birkhauser, Boston, 1982.
- [30] H. J. Landau, "The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices," *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 7, no. 3, pp. 749-767, Jul. 1994.
- [31] A. Bottcher, "Orthogonal symmetric Toeplitz matrices," *Complex Analysis and Operator Theory*, vol. 2, pp. 285-298, Mar. 2008.
- [32] P. J. Davis, *Circulant matrices*, John Wiley and Sons, New York, 1979.

- [33] P. Delsarte, Y. V. Genin, "Spectral properties of finite Toeplitz matrices," in *Proc. Int. Symp. Math. Theory Networks Syst.* (Beer Sheva, Israel), 1983, pp. 194-213.
- [34] F. Noor, S. D. Morgera, "Construction of a Hermitian Toeplitz matrix from an arbitrary set of eigenvalues," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 40, pp. 2093- 2094, Aug. 1992.
- [35] I. A. Bogaevsky, "Perestroikas of shocks and singularities of the minimum functions," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 173, pp. 1-28, Dec. 2002.
- [36] L. N. Bryzgalova, "Maximum functions of a family of functions depending on parameters," *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 12, no. 1, pp. 50-51, Jan. 1978.
- [37] L. N. Bryzgalova, "Singularities of the maximum of a parametrically dependent function," *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 11, no. 1, pp. 49-51, 1977.



УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ САДУ



ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Република Србија
Деканат: 021 6350-413; 021 450-810; Централa: 021 485 2000
Рачуноводство: 021 458-220; Студентска служба: 021 6350-763
Телефакс: 021 458-133; e-mail: ftndeana@uns.ac.rs

ИНТЕГРИСАНИ
СИСТЕМ
МЕНАџМЕНТА
СЕРТИФИКОВАН ОД:



Наш број: _____
Ваш број: _____
Датум: 2017-12-05

ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научно веће Факултета техничких наука у Новом Саду, на 47. редовној седници одржаној дана 29.11.2017. године, донело је следећу одлуку:

-непотребно изостављено-

**Тачка 12.3.1. Верификација нових техничких решења
и именовање рецензента**

Тачка 12.3.4.: У циљу верификације новог техничког решења усвајају се рецензенти:

1. Др Вељко Папић, доцент, Електротехнички факултет у Београду
2. Др Александар Купусинац, ванр. проф, Факултет техничких наука у Новом Саду

Назив техничког решења:

**“МЕТОДА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ МАКСИМАЛНЕ ЕФИКАСНОСТИ КЛАСЕ-Ф И
ИНВЕРЗНЕ КЛАСЕ-Ф ПОЈАЧИВАЧА СНАГЕ СА КОНАЧНИМ БРОЈЕМ
ХАРМОНИКА”**

Аутори техничког решења: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић, Ладислав Новак.

-непотребно изостављено-

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:
Секретар

Иван Нешковић, дипл. правник



Декан

Проф. др Раде Дорословачки

РЕЦЕНЗИЈА ТЕХНИЧКОГ РЕШЕЊА

„Метода за одређивање максималне ефикасности класе-Ф и инверзне класе-Ф појачавача снаге са коначним бројем хармоника“

аутори: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић, Ладислав Новак
пројекат: TR32016 Министарства просвете, науке и технолошког развоја

Кратак приказ разматраног техничког решења

У техничком решењу је развијена нова метода за одређивање оптималних сигнала са основним хармоником и коначним бројем узастопних парних хармоника. Карактеризација ових оптималних сигнала је омогућила одређивање теоријске границе максималне ефикасности појачавача снаге у класи-Ф и инверзної класи-Ф са коначним бројем хармоника, што је до овог техничког решења био отворен инжењерски проблем.

У првом делу техничког решења је сажето описан проблем који се решава. У другом делу је приказано стање решености овог проблема у свету и дат исцрпан преглед постојећих резултата доступних у литератури. У трећем делу, техничко решење се бави одређивањем оптималног сигнала са основним и узастопним парним хармоницима, што је омогућило одређивање максималне ефикасности. Прво је одређена највећа вредност коефицијента уз основни хармоник оптималног сигнала, тако што је а) полазни проблем преформулисан у оптимизациони проблем одређивања максимума квадратне функције више променљивих са квадратним ограничењима типа једнакости, б) коришћењем методе Лагранжових множилаца, новодобијени оптимизациони проблем је сведен на одређивање највеће сопствене вредности одговарајуће реалне симетричне Топлицове матрице, за коју су ц) одређени њен ранг и вишеструкости сопствених вредности; потом је д) одговарајућа Топлицова матрица сингуларно проширена и нормализована, чиме је постала ортогонална симетрична циклична или ортогонална симетрична косо-циклична матрица парног реда, што је омогућило е) одређивање свих њених елемената у аналитичком облику, и ф) након денормализације одређена је тражена највећа сопствена вредност која је једнака највећој вредности коефицијента уз основни хармоник оптималног сигнала са основним и узастопним парним хармоницима. Након што је одређен коефицијент уз основни хармоник оптималног сигнала, одређени су и сви остали његови коефицијенти. Ови коефицијенти су независно верификовани нумеричким путем, и излистани су примери оптималних сигнала до осмог хармоника. Потом су одређени аналитички изрази за максималне ефикасности појачавача снаге у класи-Ф (инверзної класи-Ф) у случајевима када сигнал струје (напона) има највише М узастопних парних хармоника, а сигнал напона (струје) највише К узастопних непарних хармоника. Поред тога, показано је чему теже ове ефикасности када бројеви М и К теже бесконачности, сваки понаособ или истовремено. Примера ради, одређене су и приказане максималне ефикасности појачавача снаге у класи-Ф до десетог хармоника. У свим случајевима када су одговарајуће ефикасности биле од раније познате из литературе, вредности ефикасности добијене методом развијеном у овом техничком решењу су се поклопиле са вредностима познатим из литературе.

Оцена техничког решења

Разматрано техничко решење се бави дизајном сигнала (енг. Waveform engineering) за појачаваче снаге у класи-Ф и инверзної класи-Ф. Проблем описан у техничком решењу је у потпуности решен у аналитичком облику, са неопходном математичком строгошћу, коришћењем теоријског приступа базираног на линеарној алгебри (Топлицовим матрицама и њиховим особинама) и дизајну сигнала (оптимални тригонометријски полиноми). До овог

техничког решења, по питању максималне ефикасности појачавача снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф биле су познате њене вредности само до петог хармоника. Такође су биле познате вредности максималне ефикасности у случајевима када постоји бесконачно много хармоника у оба сигнала струјно-напонског пара, или ако је један од сигнала полусинусоидалан. Главни резултат техничког решења је одређивање теоријске границе максималне ефикасности појачавача снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф у општем случају.

Значај остварених резултата

Разматрани проблем је актуелан и за његово решавање постоји континуалан инжењерски интерес, што се може закључити на основу бројних чланака објављених у водећим научно-истраживачким часописима од 2000-те године до данас.

Појачавачи снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф се користе као РФ појачавачи снаге високе ефикасности у телекомуникационим сервисима мобилне телефоније. У последње време, присутни су и као прекидачки „Push-Pull“ аудио појачавачи у мобилним телефонима, преносивим Bluetooth звучницима итд. (нпр. гама LPA217x и LPA215x интегрисаних појачавача у класи-Ф, фирме LowPowerSemi).

Ово техничко решење даје одговор на дуго отворен инжењерски проблем познавања теоријске границе ефикасности појачавача снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф, у општем случају када у сигнаlima струјно-напонског пара на излазу појачавача постоји коначан број хармоника. До овог техничког решења, биле су решене само појединачне инстанце овог проблема до петог хармоника.

Остварени резултати у оквиру овог техничког решења су практично применљиви у процесу пројектовања појачавача снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф, омогућујући дизајнерима појачавача процену квалитета оствареног дизајна, у погледу колико ефикасност развијених појачавача одступа од теоријског лимита за различите изборе хармонијских садржаја напона и струје на излазу појачавача.

Закључак

Разматрано техничко решење је оригинално, применљиво и значајно у области моделовања појачавача снаге у класи-Ф и инверзној класи-Ф. У том смислу га позитивно оцењујем и предлажем да се техничко решење „Метода за одређивање максималне ефикасности класе-Ф и инверзне класе-Ф појачавача снаге са коначним бројем хармоника“, чији су аутори Анамарија Јухас, Станиша Даутовић и Ладислав Новак, прихвати и класификује као резултат „М85-нова метода“.

Београд
16. децембар 2017.



Доц. др Вељко Папић
Електротехнички факултет
Универзитет у Београду

РЕЦЕНЗИЈА ПРЕДЛОЖЕНОГ ТЕХНИЧКОГ РЕШЕЊА

Предмет: Мишљење о испуњености критеријума за признавање техничког решења

Назив Техничког решења:

Метода за одређивање максималне ефикасности класе- Φ и инверзне класе- Φ појачавача снаге са коначним бројем хармоника

Аутори: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић и Ладислав Новак

Техничко решење је развијено у оквиру пројекта ТР-32016,
руководилац пројекта: проф. др Љиљана Живанов

Категорија Техничког решења: М85, подтип решења: нова метода

Образложење

У оквиру техничког решења развијена је метода за одређивање оптималних сигнала са основним и узастопним парним хармоницима. Такав тип сигнала се јавља као сигнал струје код појачавача снаге у класи- Φ или као сигнал напона код појачавача снаге у инверзној класи- Φ (скр. класи- Φ^{-1}) са коначним бројем хармоника. У техничком решењу је решен отворен проблем колико износи максимална ефикасност појачавача у класи- Φ и класи- Φ^{-1} у општем случају, у зависности од броја хармоника присутних у сигнаlima струје и напона.

У првом делу техничког решења изведени су аналитички изрази за коефицијент уз основни хармоник оптималног сигнала са узастопним парним хармоницима, а након тога и за све остале коефицијенте овог сигнала. Поступак је базиран на превођењу оригиналног проблема у проблем одређивања сопствених вредности одговарајућих Toeplitz-ових матрица.

Теоријски резултати изложени у првом делу техничког решења су примењени за одређивање максималне ефикасности појачавача снаге у класама Φ и Φ^{-1} са коначним бројем хармоника. Као резултат, изведени су аналитички изрази за максималне ефикасности појачавача снаге у класама Φ и Φ^{-1} са произвољним бројем хармоника. Овај резултат уједно важи и за максималну могућу ефикасност појачавача снаге у континуалној класи- Φ и континуалној класи- Φ^{-1} са коначним бројем хармоника, који се у данашње време интензивно развијају као широкопојасни РФ појачавачи снаге за примене у сервисима мобилне телефоније четврте и пете генерације (4G и 5G).

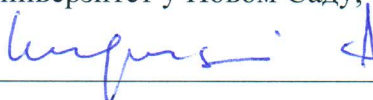
Помоћу овог техничког решења може се на лак начин израчунати теоријска граница максималне ефикасности појачавача снаге у класама Φ и Φ^{-1} , у зависности од броја присутних виших хармоника у сигнаlima струје и напона на излазу појачавача. Теоријска граница максималне ефикасности се може искористити за процену квалитета током процеса пројектовања појачавача који су предвиђени да раде у класи- Φ (односно класи- Φ^{-1} , континуалној класи- Φ или континуалној класи- Φ^{-1}).

Закључак

На основу свега наведеног, предлажем да се Техничко решење под називом „Метода за одређивање максималне ефикасности класе- Φ и инверзне класе- Φ појачавача снаге са коначним бројем хармоника“ чији су аутори Анамарија Јухас, Станиша Даутовић и Ладислав Новак прихвати као ново техничко решење на пројекту ТР-32016 Министарства просвете, науке и технолошког развоја и класификује као резултат: **М85 – НОВА МЕТОДА**.

У Новом Саду,
21. 12. 2017. год.

Проф. др Александар Купусинац,
Универзитет у Новом Саду, ФТН





УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ САДУ



ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Република Србија
Деканат: 021 6350-413; 021 450-810; Централа: 021 485 2000
Рачуноводство: 021 458-220; Студентска служба: 021 6350-763
Телефакс: 021 458-133; e-mail: ftndean@uns.ac.rs

ИНТЕГРИСАНИ
СИСТЕМ
МЕНАЏМЕНТА
СЕРТИФИКОВАН ОД:



Наш број: 01.сл

Ваш број: _____

Датум: 2018-01-03

ИЗВОД ИЗ ЗАПИСНИКА

Наставно-научно веће Факултета техничких наука у Новом Саду, на 49. редовној седници одржаној дана 27.12.2017. године, донело је следећу одлуку:

-непотребно изостављено-

ТАЧКА 13.1. Верификација нових техничких решења и именовање рецензената

Тачка 13.1.1.: На основу позитивног извештаја рецензената верификује се техничко решење под називом:

Назив техничког решења:

**“МЕТОДА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ МАКСИМАЛНЕ ЕФИКАСНОСТИ КЛАСЕ-Ф И
ИНВЕРЗНЕ КЛАСЕ-Ф ПОЈАЧИВАЧА СНАГЕ СА КОНАЧНИМ БРОЈЕМ
ХАРМОНИКА”**

Аутори техничког решења: Анамарија Јухас, Станиша Даутовић, Ладислав Новак.

-непотребно изостављено-

Записник водила:

Јасмина Димић, дипл. правник

Тачност података оверава:
Секретар

Иван Нешковић, дипл. правник

Декан



Проф. др Раде Дорословачки